Apuntes de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies

Angel Montesdeoca[1]

La Laguna, 2004

[1]amontes@ull.es http://webpages.ull.es/users/amontes

Contenido

TEMA I

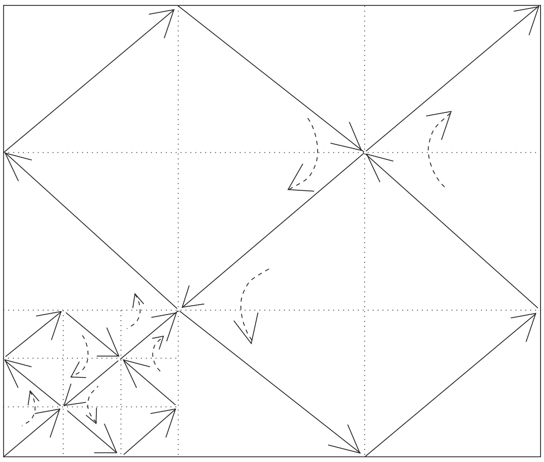
Representación paramétrica de curvas

Este curso está dedicado al estudio de la geometría diferencial de curvas y superficies en el espacio tridimensional ordinario, a la cual le podemos dar además los calificativos de métrica y analítica. Decir que la geometría es *analítica* es porque se emplean sistemas de coordenadas y así se puede utilizar métodos de álgebra y análisis. Además, que la geometría sea *métrica* se caracteriza diciendo que es el estudio de las propiedades de las figuras que son invariantes cuando se someten a movimientos rígidos, es decir rotaciones y traslaciones. Así, la *medida* de ciertas cantidades como, por ejemplo, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos rectas o el área de un triángulo son invariantes por movimientos rígidos, lo que justifica el nombre de geometría métrica.

La geometría *diferencial* (o *infinitesimal*) de una figura se refiere a las propiedades de la misma que dependen sólo de un entorno de uno de sus elementos. La definición bien conocida de tangente en un punto a una curva, establecida como el límite de las secantes que pasan por dicho punto y por otro próximo a él sobre la curva, cuando el segundo punto se aproxima al primero a lo largo de la curva, es tal vez la definición geométrica más simple que tiene un carácter diferencial natural; obviamente depende sólo de un entorno de su punto de contacto. Por contra, el problema de determinar los puntos de intersección de una recta con una cónica requiere el conocimiento global de ambas figuras, por lo que no es un problema esencialmente de carácter diferencial.

1.1 Representación paramétrica de curvas

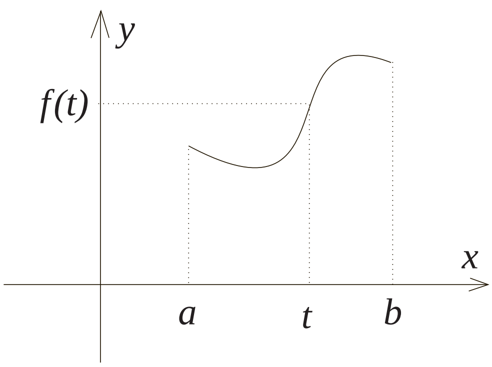
Nuestro objetivo es caracterizar ciertos subconjuntos de $I\!R^3$ (llamados curvas) que son en cierto sentido, unidimensionales y en los cuales los métodos del cálculo diferencial pueden ser aplicados. Un camino natural para definir tales conjuntos es a través de funciones diferenciables.



El concepto de curva entendido como la imagen de un intervalo de $I\!R$ mediante una aplicación continua, permite considerar curvas que llenen toda una región del plano, tal como ocurre con la curva de Peano (1890) del dibujo, definida admitiendo que una curva puede obtenerse como límite de poligonales inscritas, por lo que bastará dar la ley de formación en estas poligonales inscritas en la curva que vamos a considerar. Puede verse otro ejemplo de curva definida analítica que llena un cuadrado unidad en [1, pág. 378].

A fin de dar una definición de curva parametrizada, tal cual la vamos a entender a lo largo de este curso, demos unas definiciones previas.

Definición 1.1 *Si* $\overrightarrow{\alpha} : [a,b] \to I\!R^3$ *,* $t \mapsto \vec{\alpha}(t)$ *es una aplicación continua e inyectiva, al conjunto de puntos* $\vec{\alpha}([a,b])$ *se denomina* arco simple.

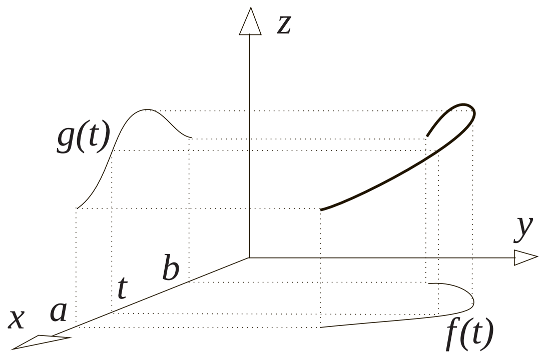


Ejemplo 1.2 La gráfica en el plano XOY de una aplicación continua f, definida en un intervalo cerrado es un arco simple:

$$\overrightarrow{\alpha} : [a,b] \to I\!R^3 \qquad t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (t, f(t), 0).$$

Ejemplo 1.3 El conjunto de puntos de $I\!R^3$ que satisfacen simultáneamente a las dos ecuaciones $y = f(x)$, $z = g(x)$, donde f y g son funciones continuas definidas en un intervalo cerrado $[a,b]$, es un arco simple.

$$\overrightarrow{\alpha} : [a,b] \to I\!R^3 \qquad t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (t, f(t), g(t)).$$



Ejemplo 1.4 La circunferencia no es un arco simple, pues toda aplicación continua debe aplicar al menos dos puntos distintos del intervalo en un mismo punto, y, por tanto, no es inyectiva.

Definición 1.5 *Una aplicación* $\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3$ *,* I *intervalo de* $I\!R$*, se dice que es* localmente inyectiva*, si* $\forall t_0 \in I$*,* $\exists \delta > 0$ *tal que* $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset I$ *y* $\vec{\alpha}_{|[t_0-\delta, t_0+\delta]}$ *es inyectiva.*

Nota 1.6 Si se da el caso en el que t_0 coincide con uno de los extremos del intervalo, por ejemplo el inferior, sea éste a, se requiere que exista un $\delta > 0$ tal que $\vec{\alpha}_{|[a,a+\delta]}$ sea inyectiva.

Definición 1.7 *Se llama* curva *a la imagen de un intervalo mediante una aplicación continua localmente inyectiva* $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ *.*

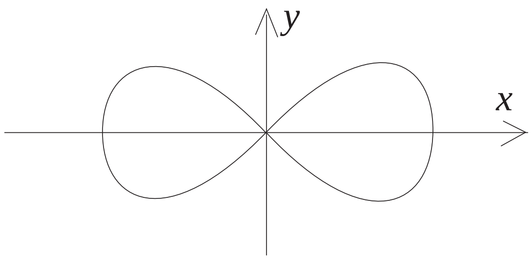
Definición 1.8 *La aplicación* $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ *,* $t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *que define la curva se denomina* representación paramétrica *de la curva.*

Ejemplo 1.9 La circunferencia es una curva:

$$\vec{\alpha} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \quad t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, 0).$$

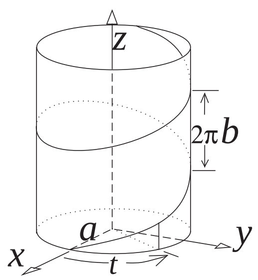
Ejemplo 1.10 La figura de forma de "ocho" definida por las ecuaciones:

$$x = 2\cos(t - \frac{\pi}{2})$$
$$y = \operatorname{sen} 2(t - \frac{\pi}{2}) \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$
$$z = 0$$



es también una curva.

Ejemplo 1.11 La ecuación $\vec{\alpha}(t) = t\vec{a} + \vec{b}$, con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ constantes y $-\infty < t < \infty$, representa una recta, que pasa por el punto $\vec{b}$ y tiene la dirección del vector $\vec{a}$, que es obviamente una curva.



Ejemplo 1.12 La curva de representación paramétrica

$$\vec{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$$

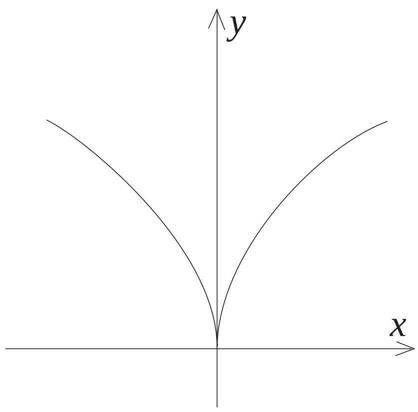
es una hélice circular de paso b en el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. El parámetro t mide el ángulo que el eje OX forma con la línea que une el origen O con el punto de proyección del extremo del vector $\vec{\alpha}(t)$ sobre el plano XOY.

Ejemplo 1.13 La aplicación $\vec{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

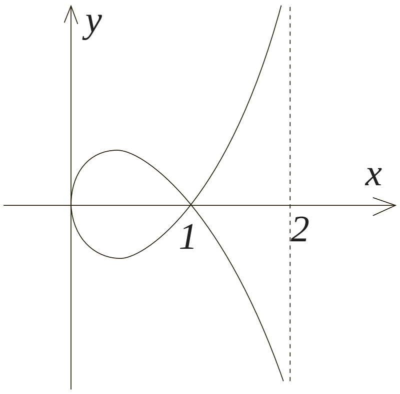
$$\vec{\alpha}(t) = (t^3, t^2, 0)$$

es una representación paramétrica de la curva cuya gráfica se adjunta.

Nótese que $\vec{\alpha}\,'(0) = (0, 0, 0)$.



Ejemplo 1.14 La aplicación $\vec{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por:



$$t \mapsto \vec{\alpha}(t) = (\frac{2t^2}{1+t^2}, \frac{t(t^2-1)}{1+t^2}, 0)$$

es una representación paramétrica de una curva, puntos del plano que verifican,

$$(x^2+y^2)(x-2)+x=0,$$

aunque no inyectiva ($\vec{\alpha}(1)=\vec{\alpha}(-1)=(1,0,0)$).

Ejemplo 1.15 La aplicación $\vec{\alpha}: I\!R \to I\!R^3$, dada por $\vec{\alpha}(t)=(t,|t|,0)$ es también una representación paramétrica de una curva.

Nota 1.16 De acuerdo con nuestra definición de curva no puede ser considerada como tal, la "curva" de Peano considerada antes, pues lógicamente la aplicación que la define no es localmente inyectiva.

Nota 1.17 Tampoco puede ser considerada como curva, según nuestra definición, la que tiene una gráfica como la letra Y, pues existirá un valor del parámetro t_0 interior en el intervalo de definición que corresponde a uno de los extremos de la Y y por tanto, deja de ser inyectiva en cualquier entorno de t_0.

Con el fin de considerar figuras como las de la Nota 1.17, debemos sustituir el requerimiento de inyectividad local por otro, que puede ser sólo exigir inyectividad local a trozos, esto es:

Definición 1.18 *Una aplicación* $\vec{\alpha}: I \to I\!R^3$ *es* localmente inyectiva a trozos *si es posible dividir el intervalo* I *en un número finito de subintervalos en los que* $\vec{\alpha}$ *sea localmente inyectiva.*

1.2 Representaciones paramétricas equivalentes

El estudio de las propiedades de una curva que haremos valiéndonos de sus ecuaciones, depende de la representación paramétrica de la curva más bien que de la curva misma. Esta, al admitir una infinidad de representaciones paramétricas suscita el problema de examinar en qué casos distintas representaciones dan una misma curva y según los convenios que adoptemos así tendremos fijado el concepto de curva. Hemos de explicar cuando dos ecuaciones

$$\vec{\alpha}(t)=(x(t),(y(t),z(t)) \qquad \text{y} \qquad \vec{\alpha}^*(t^*)=(x^*(t^*),y^*(t^*),z^*(t^*)),$$

representan la misma curva, para poder decir en este caso que tenemos dos representaciones paramétricas distintas de una misma curva o que las curvas coinciden. Entonces diremos que dichas representraciones paramétricas son equivalentes.

Sólo después de estudiar el significado de esta equivalencia como relación reflexiva, simétrica y transitiva, podemos definir una curva como una de estas clases de equivalencia. Comencemos con un ejemplo:

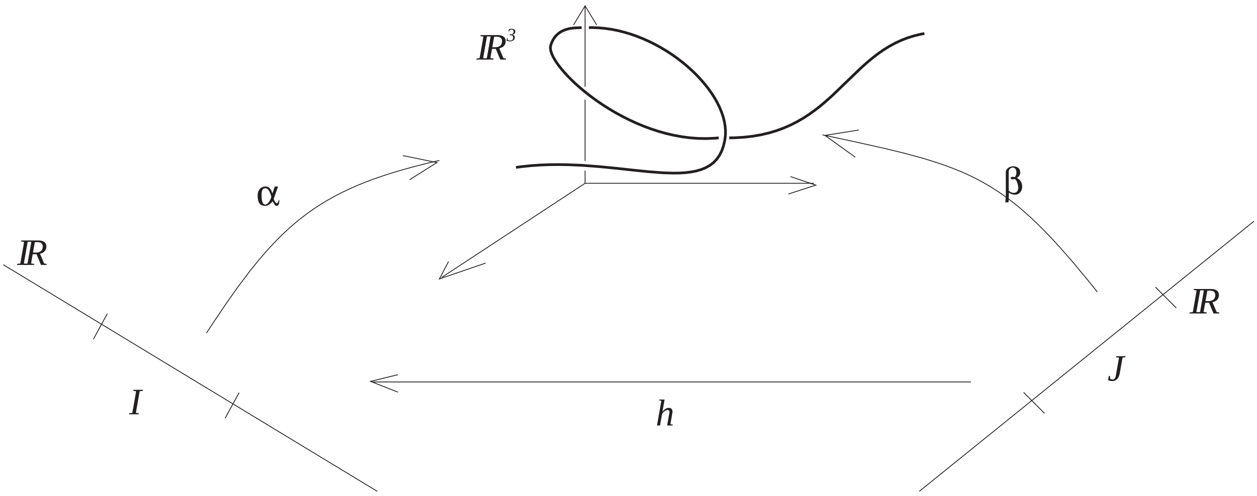
Ejemplo 1.19 Las representaciones paramétricas siguientes: $\overrightarrow{\alpha} : [0, 2\pi] \to I\!R^3$, $\overrightarrow{\beta} : [0, \pi] \to I\!R^3$ y $\overrightarrow{\gamma} : [0, 4\pi] \to I\!R^3$, definidas por

$$\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \qquad \vec{\beta}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, 0) \qquad \vec{\gamma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$$

describen todas la misma figura, la circunferencia en el pano XOY, $x^2 + y^2 = 1$.

Tratamos de relacionar representaciones paramétricas de una misma gráfica.

Definición 1.20 *Dos representaciones paramétricas* $\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3$ *y* $\overrightarrow{\beta} : J \to I\!R^3$ *se dice que son* equivalentes *si existe una función continua monótona creciente que aplica* J *sobre* I, $h : J \to I \quad u \mapsto t = h(u)$, *tal que* $\vec{\alpha}(h(u)) = \vec{\beta}(u)$, $\forall u \in J$.



Nota 1.21 Dos representaciones paramétricas equivalentes no sólo tienen el mismo conjunto como imagen sino que también establecen la misma sucesión de puntos en este conjunto.

Definición 1.22 *Si existe una aplicación continua monótona decreciente que aplica* J *sobre* I, $h : J \to I \quad u \mapsto t = h(u)$, *tal que* $\vec{\alpha}(h(u)) = \vec{\beta}(u)$, $\forall u \in J$, *entonces las dos representaciones se dice que son* opuestas.

Nota 1.23 En este caso las dos representaciones paramétricas determinan el mismo conjunto de puntos, pero el orden de los puntos inducido por una de las representaciones es opuesto al inducido por la segunda.

El mismo conjunto de puntos puede ser descrito por dos representaciones paramétricas no equivalentes y no opuestas. Por ejemplo la figura de "ocho" (Ejemplo 1.10) admite otra representación paramétrica:

$$\vec{\beta}(u) = \begin{cases} (2\cos(u - (\pi/2)),\ \operatorname{sen} 2(u - (\pi/2))) & 0 \le u \le \pi \\ (-2\cos((3\pi/2) - u),\ \operatorname{sen} 2((3\pi/2) - u)) & \pi \le u \le 2\pi \end{cases}$$

Desde el punto de vista geométrico no hay razón para distinguir entre representaciones paramétricas equivalentes, es por lo que damos la siguiente

Definición 1.24 *Una clase de representaciones paramétricas equivalentes se llamará* curva paramétrica*.*

Usaremos simplemente en lo sucesivo el término curva para indicar una curva paramétrica.

Estudiaremos los hechos o resultados que son comunes para todas las representaciones paramétricas de una misma clase, o sea, si ella se conserva por un cambio monótono creciente de parametrización.

1.3 Curvas paramétricas regulares

Definición 1.25 *Una curva paramétrica se dice que es* regular de clase C^k *si, entre sus representaciones paramétricas, existe una* $\overrightarrow{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $\vec{\alpha}$ *es una aplicación de clase* C^k *y* $\vec{\alpha}\,'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$*.*

Nota 1.26 Una curva regular de clase C^k es, de hecho, también regular de todas las clases inferiores C^p $(p \leq k)$.

Definición 1.27 *Una curva se llama* regular a trozos *de clase* C^k*, si existe entre sus representaciones paramétricas una* $\overrightarrow{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ *tal que el intervalo* $I = (a, b)$ *puede ser dividido por puntos* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{p-1} < t_p = b$*, de tal forma que* $\vec{\alpha}$ *restringuido a cada uno de los intervalos parciales* $]t_i, t_{i+1}[$ *es de clase* C^k *y satisfaciéndose la condición* $\vec{\alpha}\,'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in]t_i, t_{i+1}[$ $(0 \leq i < p)$*.*

Definición 1.28 *Puntos de parámetro* t *en los que la derivada* $\vec{\alpha}\,'(t)$ *no existe o* $\vec{\alpha}\,'(t) = \vec{0}$ *se llaman* puntos singulares de la representación paramétrica $\overrightarrow{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ *.*

Definición 1.29 *Se llama punto* singular esencial *de una curva, aquél que lo es para cualquiera de las representaciones paramétricas que definen la curva.*

Ejemplo 1.30 Son curvas regulares de clase C^∞ las consideradas en los ejemplos: 1.9, 1.10, 1.11, 1.12 y 1.14. No lo es la del Ejemplo 1.13, aunque sí de clase C^∞. La del Ejemplo 1.15 no admite derivada en $t = 0$.

Ejemplo 1.31 Las dos representaciones paramétricas de la recta:

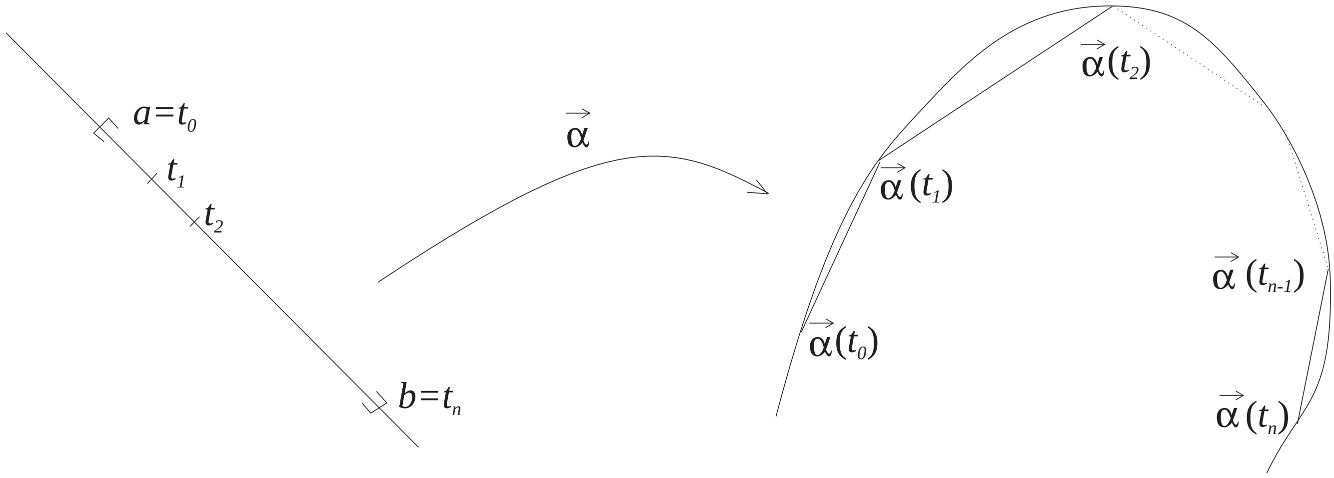
$$\overrightarrow{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad t \mapsto \vec{\alpha}(t) = t\vec{a} \qquad\qquad \overrightarrow{\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad u \mapsto \vec{\beta}(u) = u^3\vec{a}$$

($\vec{a}$ vector constante no nulo), son equivalentes, pero el origen es punto singular para la segunda representación, no para la primera. Este es un ejemplo de singularidad no esencial.

En el Ejemplo 1.13, la representación paramétrica dada es de clase C^∞ pero $\vec{\alpha}\,'(0) = \vec{0}$. En este ejemplo cualquier otra representación paramétrica equivalente a la dada tiene este punto como punto singular, por lo que se trata de una singularidad esencial. (Ver la Proposición 1.41).

1.4 Longitud de arco de una curva

Tratamos de definir la longitud de una curva de representación paramétrica definida en un intervalo cerrrado, $\overrightarrow{\alpha} : [a, b] \to I\!R^3$.



Se divide el segmento $[a, b]$ en un número finito de intervalos no solapantes, usando los puntos de división $a \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq t_n = b$ y se forma la suma de las longitudes de los segmentos que unen pares de puntos correspondientes a dos valores consecutivos t_i y t_{i+1} del parámetro de esta subdivisión:

$$\sum_{k=1}^{n} \|\vec{\alpha}(t_k) - \vec{\alpha}(t_{k+1})\| .$$

Definición 1.32 *El ínfimo de las cotas superiores de estas sumas para todas las subdivisiones se llama* longitud de arco, *(o brevemente,* longitud*) de la representación paramétrica.*

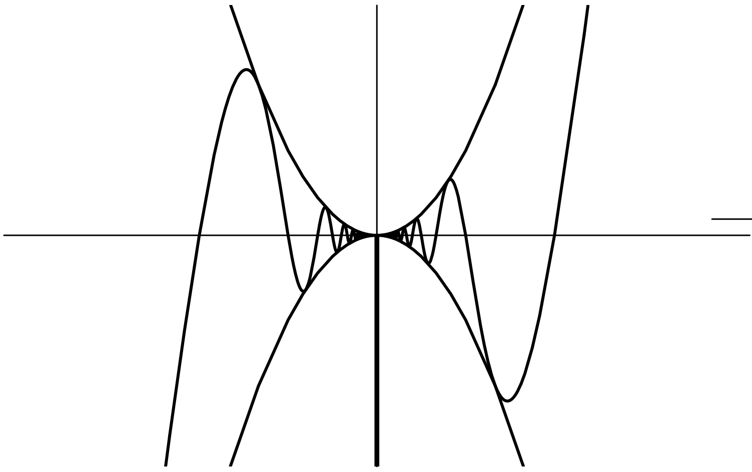
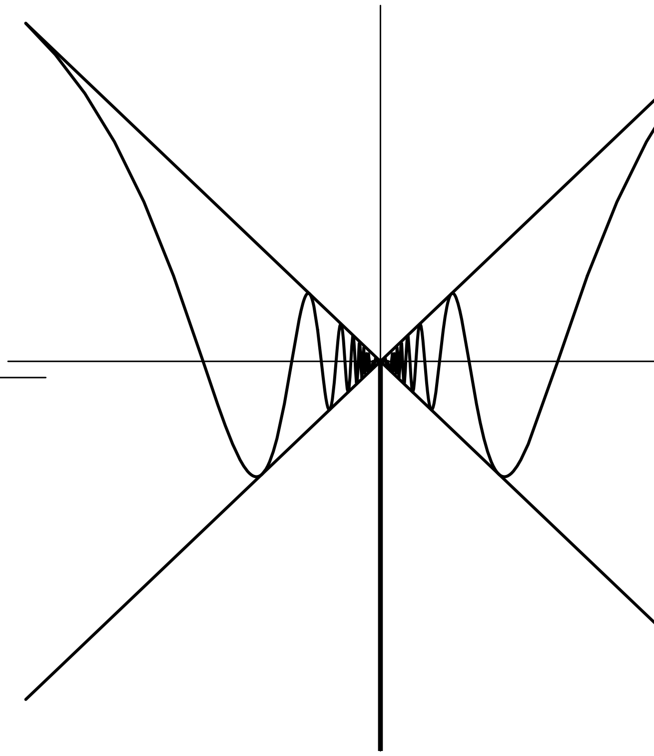
Definición 1.33 *Una representación paramétrica se dice que es* rectificable *si su longitud es finita.*

Nota 1.34 Existe un criterio de caracterización de rectificabilidad de curvas planas definidas por una función continua f, $\vec{\alpha}(t) = (t, f(t))$ [1, Pag. 171]:

Criterio de Jordan: "Son rectificables las curvas planas definidas por funciones continuas de variación acotada, y sólo ellas".

Ejemplo 1.35 La curva definida por $y = x^2 \operatorname{sen}(\pi/x)$ es rectificable, y no lo es la curva $y = x \operatorname{sen}(\pi/x)$.

En las figuras que aparecen a continuación, la primera está enmarcada entre las parábolas $y = \pm x^2$ y la segunda por las rectas $y = \pm x$. Tomando estas curvas como topes podemos acotar superiormente la primera e inferiormente la segunda, para demostrar su longitud finita e infinita, respectivamente.

Proposición 1.36 (Definición) [14, Ejercicios 3.23, 3.24] *Una representación paramétrica regular a trozos* $\overrightarrow{\alpha} : [a, b] \to I\!R^3$ *es rectificable y su longitud es*

$$l = \int_a^b \|\vec{\alpha}'(t)\| \, dt.$$

O bien $l = \int_a^b \sqrt{\vec{\alpha}\,'(t) \cdot \vec{\alpha}\,'(t)}dt$, o $l = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt$.

Corolario 1.37 *La longitud de representaciones paramétricas regulares a trozos equivalentes son iguales.*

Demostración.- Representaciones paramétricas surgen de una representación paramétrica dada $\overrightarrow{\alpha} : (a, b) \to I\!R^3 \quad t \mapsto \vec{\alpha}(t)$, por una sustitución $t = h(u)$, donde $h : (c, d) \to (a, b)$, es una función continua y monótona creciente de un nuevo parámetro u. Así la representación paramétrica equivalente es de la forma

$$\overrightarrow{\beta} : (c, d) \to I\!R^3 \qquad u \mapsto \vec{\beta}(u) = \vec{\alpha}(h(u)).$$

Si ambas representaciones son regulares de clase C^1, entonces la función h es diferenciable a trozos ([3, Pag. 70,71]) y tenemos salvo acaso en puntos singulares de una u otra representación

$$\frac{d\vec{\beta}}{du} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}\frac{dt}{du}.$$

Consecuentemente,

$$\int_c^d \left\|\frac{d\vec{\beta}}{du}\right\| du = \int_c^d \left\|\frac{d\vec{\alpha}}{dt}\right\| \frac{dt}{du} du = \int_a^b \left\|\frac{d\vec{\alpha}}{dt}\right\| \frac{dt}{du}\frac{du}{dt} dt = \int_a^b \left\|\frac{d\vec{\alpha}}{dt}\right\| dt,$$

ya que $dt/du > 0$. □

Nota 1.38 Como consecuencia de este corolario podemos hablar de longitud de arco de una curva paramétrica sin referirnos a una representación particular.

Corolario 1.39 *La longitud de una representación paramétrica no depende de la elección de coordenadas cartesianas.*

Demostración.- La invariancia respecto a rotaciones del sistema de coordenadas alrededor del origen se sigue de la expresión vectorial de la longitud de arco

$$l = \int_a^b \|\vec{\alpha}\,'(t)\| dt,$$

ya que el valor absoluto de todo vector es invariante respecto a rotaciones.

Si cambiamos de origen, la representación paramétrica $\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3 \quad t \mapsto \vec{\alpha}(t)$, será cambiada por $\overrightarrow{\beta} : I \to I\!R^3 \quad t \mapsto \vec{\beta}(t) = \vec{\alpha}(t) + \vec{a}$, donde $\vec{a}$ es un vector constante; luego $\vec{\beta}\,'(t) = \vec{\alpha}\,'(t)$. □

Parametrización natural

Dada una representación paramétrica regular a trozos $\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3$ de clase C^1, o superior, podemos introducir un nuevo parámetro s por la fórmula

$$s = \int_{t_0}^t \|\vec{\alpha}\,'(u)\| du.$$

Ya que $s : I \subset I\!R \to J \subset I\!R$ es una función creciente ($\|\vec{\alpha}\,'(u)\| > 0$, excepto para un número finito de puntos) la función inversa es también monótona creciente y de clase C^1 a trozos ([17, Pag. 294]).

Usando esta función tenemos una representación paramétrica equivalente

$$\overrightarrow{\beta} : J \to I\!R^3 \qquad s \mapsto \vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(t(s)).$$

Definición 1.40 *El parámetro s se llama* parámetro natural *o* parámetro arco*.*

Si tomáramos otro punto inicial t_1 obtenemos otro parámetro natural s^*, que está relacionado con el anterior por la fórmula $s^* = s + c$, siendo c una constante igual a la longitud de la porción de la curva entre los dos orígenes

$$c = \int_{t_1}^{t_0} \|\vec{\alpha}\,'(t)\| dt.$$

Notación.- En lo sucesivo utilizaremos la siguiente notación para las derivadas respecto al parámetro natural s y a uno arbitrario t:

$$\frac{d\vec{\alpha}}{ds} = \dot{\vec{\alpha}}, \qquad \frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \vec{\alpha}\,'.$$

Proposición 1.41 *Si P es un punto regular de una representación paramétrica regular a trozos de clase C^k de una curva paramétrica $\mathcal{C}$, entonces P también es un punto regular de la representación natural de $\mathcal{C}$. Esta representación es también de clase C^k.*

Demostración.- Partimos de una parametrización $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ de la curva $\mathcal{C}$ tal que $\overrightarrow{OP} = \vec{\alpha}(t_0)$; no se pierde generalidad si ponemos $t_0 = 0$. Introduciendo el parámetro natural

$$s = h(t) = \int_0^t \|\vec{\alpha}\,'(u)\| du.$$

Por continuidad de $\vec{\alpha}\,'$ en $u = 0$ y, ya que el punto es regular, $\vec{\alpha}\,'(0) \neq \vec{0}$, se tiene

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0} = \|\vec{\alpha}\,'(0)\| \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{dt}{ds}\right|_{s=0} = \frac{1}{\|\vec{\alpha}\,'(0)\|}.$$

Entonces existe la derivada, y es distinta de cero en $s = 0$, de la parametrización natural $\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(h^{-1}(s))$, siguiente

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}\frac{dt}{ds}.$$

Además, $\|\vec{\alpha}\,'(0)\| \neq 0$ y la continuidad de las derivadas $\vec{\alpha}\,'', \ldots, \vec{\alpha}^{(k)}$ en $t = 0$, implica que existan y sean continuas las derivadas

$$\frac{d^2t}{ds^2}, \ \ldots \ , \frac{d^kt}{ds^k},$$

lo que implica la continuidad de las derivadas $\dot{\vec{\beta}}$, ... , $\overset{(k)}{\vec{\beta}}$ con respecto al parámetro natural en el punto $s = 0$.

Ya que esto es cierto para todo punto regular de una representación, la representación natural será de clase C^k a trozos, con puntos singulares posiblemente en puntos singulares de la representación original $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3$. □

Esta proposición demuestra que *"la representación natural tiene un punto singular P si y sólo si este punto es singular para toda representación equivalente"*. Así los puntos singulares de la representación natural coinciden con los esenciales de la curva paramétrica. (Ver Ejemplo 1.13).

Proposición 1.42 *La derivada del vector posición de un punto de la curva relativo al parámetro natural, si existe, es un vector unitario. En puntos singulares esenciales de una curva paramétrica estas derivadas no existen.*

Demostración.- Sea $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3$ una parametrización arbitraria y $\vec{\beta} : J \to I\!R^3$ la parametrización natural.

$$s = \int_{t_0}^t \|\vec{\alpha}\,'(u)\| du \ \Rightarrow \ \frac{ds}{dt} = \|\vec{\alpha}\,'(t)\| \ \Rightarrow \ \|\dot{\vec{\beta}}(s)\| = \|\vec{\alpha}\,'(t)\| \frac{dt}{ds} = \frac{\|\vec{\alpha}\,'(t)\|}{\|\vec{\alpha}\,'(t)\|} = 1.$$

Consecuentemente, para la parametrización natural no puede ser $\dot{\vec{\beta}} = \vec{0}$, y la derivada $\dot{\vec{\beta}}$ no existe en puntos singulares esenciales. □

TEMA II

Tangente y plano osculador a una curva

Comenzamos este tema estudiando, desde el punto de vista del Cálculo, el concepto de de contacto de curvas, que utilizaremos para definir varios entes geométricos tales como la tangente, el plano osculador, el círculo osculador y la esfera osculatriz. Dado lo tedioso del desarrollo de esta teoría, hemos recuadrado aquellas proposiciones que son de uso práctico a la hora determinar el orden de contacto de dos curvas, según vengan dadas por diferentes parametrizaciones (naturales o no) o por ecuaciones implícitas.

2.1 Contacto de curvas

Vamos a estudiar la posición relativa de dos curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en el entorno de un punto P_0 por el que ambas pasan.

Definición 2.1 *Se dice que dos curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ regulares de clase C^k que pasan por un punto P_0 tienen un* contacto de orden p al menos *en P_0 si existen una representación paramétrica $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ de $\mathcal{C}_1$, una representación paramétrica $\vec{\beta} : J \to \mathbb{R}^3$ de $\mathcal{C}_2$, $t_0 \in I$ y $u_0 \in J$, satisfaciéndose:*

$$i) \quad \vec{\alpha}(t_0) = \vec{\beta}(u_0) = \overrightarrow{OP_0} \qquad\qquad ii) \quad \vec{\alpha}^{(r)}(t_0) = \vec{\beta}^{(r)}(u_0) \quad (r \leq p \leq k).$$

Proposición 2.2 *Dada $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ una representación paramétrica regular de clase C^k de una curva $\mathcal{C}_1$ que pasa por el punto P_0 de parámetro t_0 entonces, para que una curva $\mathcal{C}_2$ regular de clase C^k tenga con $\mathcal{C}_1$ un contacto de orden p al*

menos en P_0, es necesario y suficiente que exista una representación paramétrica $\overrightarrow{\beta} : J \to I\!R^3$ de $\mathcal{C}_2$ tal que para $u_0 \in J$

$$i) \quad \vec{\alpha}(t_0) = \vec{\beta}(u_0) = \overrightarrow{OP_0} \qquad ii) \quad \vec{\alpha}^{(r)}(t_0) = \vec{\beta}^{(r)}(u_0) \quad (r \leq p \leq k).$$

Demostración.- ($\Leftarrow$) Evidente.
($\Rightarrow$) En la demostración nos limitaremos sólo a construir una tal parametrización de un trozo de curva $\mathcal{C}_2$ que contiene a P_0. Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen un contacto de orden p al menos en P_0, existen $\overrightarrow{\alpha_1} : I_1 \to I\!R^3 \;\; t_1 \mapsto \vec{\alpha}(t_1)$; $\overrightarrow{\beta_1} : J_1 \to I\!R^3 \;\; u_1 \mapsto \vec{\beta}(u_1)$ representaciones paramétricas de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente y $t_1^0 \in I_1$, $u_1^0 \in J_1$ tal que

$$\vec{\alpha}_1(t_1^0) = \vec{\beta}_1(u_1^0) = \overrightarrow{OP_0} \qquad \vec{\alpha}_1^{(r)}(t_1^0) = \vec{\beta}_1^{(r)}(u_1^0) \quad (r \leq p).$$

Como $\vec{\alpha}, \vec{\alpha}_1$ representan la misma curva, existe una aplicación $h : I \to I_1$, $t_1^0 = h(t_0)$, diferenciable de clase C^k tal que

$$\vec{\alpha}(t) = \vec{\alpha}_1(h(t)) \qquad t \in I.$$

Hagamos un cambio de parámetro en la curva $\mathcal{C}_2$ para que el valor del parámetro u_1^0 coincida con t_1^0, basta tomar $u_2 = u_1 - t_1^0 + u_1^0$. Tenemos así una representación $\overrightarrow{\beta_2} : J_2 \to I\!R^3$ de clase C^k de $\mathcal{C}_2$ definida por $\vec{\beta}_2(u_2) = \vec{\beta}_1(u_2 - t_1^0 + u_1^0)$. Consideremos el intervalo $\tilde{I}_1 = I_1 \cap J_2$ e $\tilde{I} = h^{-1}(\tilde{I}_1)$. Restringimos $\vec{\alpha}$ a $\tilde{I}$ y $\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}_2$ a $\tilde{I}_1$ y seguiremos denominándolas con la misma letra.

Finalmente, consideremos una nueva parametrización de la curva $\mathcal{C}_2$ definida por

$$\vec{\beta}(t) = \vec{\beta}_2(h(t)) \quad t \in \tilde{I},$$

y ésta es la representación, al menos de un trozo de la curva que pasa por el punto P_0 de $\mathcal{C}_2$, que verifica las condiciones buscadas:

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}(t_0) &= \vec{\alpha}_1(h(t_0)) = \vec{\alpha}_1(t_1^0) = \overrightarrow{OP_0} \\
\vec{\beta}(t_0) &= \vec{\beta}_2(h(t_0)) = \vec{\beta}_2(t_1^0) = \vec{\beta}_1(t_1^0 + u_1^0 - t_1^0) = \vec{\beta}_1(u_1^0) = \overrightarrow{OP_0} \\
(\vec{\alpha} - \vec{\beta})'(t_0) &= (\vec{\alpha}_1 - \vec{\beta}_2)'(t_1^0)h'(t_0) = (\vec{\alpha}_1{}'(t_1^0) - \vec{\beta}_1{}'(u_1^0))h'(t_0) = \vec{0} \\
(\vec{\alpha} - \vec{\beta})^{(r)}(t_0) &= (\vec{\alpha}_1 - \vec{\beta}_2)^{(r)}(t_1^0)(h'(t_0))^r + (\vec{\alpha}_1 - \vec{\beta}_2)^{(r-1)}(t_1^0)c_{r-1} + \cdots \\
&\qquad \cdots + (\vec{\alpha}_1 - \vec{\beta}_2)'(t_1^0)h^{(r)}(t_0) = \\
&= (\vec{\alpha}_1^{(r)}(t_1^0) - \vec{\beta}_1^{(r)}(u_1^0))(h'(t_0))^r + (\vec{\alpha}_1^{(r-1)}(t_1^0) - \vec{\beta}_1^{(r-1)}(u_1^0))c_{r-1} + \cdots \\
&\qquad \cdots + (\vec{\alpha}_1{}'(t_1^0) - \vec{\beta}_1'(u_1^0))h^{(r)}(t_0) = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Así,

$$i) \quad \vec{\alpha}(t_0) = \vec{\beta}(u_0) = \overrightarrow{OP_0} \quad ii) \quad \vec{\alpha}^{(r)}(t_0) = \vec{\beta}^{(r)}(u_0) \quad (r \leq p \leq k).$$

Como queríamos demostrar. □

Nota 2.3 Si $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ son dos parametrizaciones arbitrarias de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tales que $\vec{\alpha}(t_0) = \vec{\beta}(u_0) = \overrightarrow{OP_0}$ que tienen en P_0 un contacto de orden $\geq p$, en general no se tiene ni siquiera $\vec{\alpha}\,'(t_0) = \vec{\beta}\,'(u_0)$.

Sin embargo, para $p = 1$, se tiene:

Proposición 2.4 *Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos curvas de clase $k \geq 1$ regulares definidas por las parametrizaciones $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3$ $\vec{\beta} : J \to I\!R^3$. Para que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tengan un contacto de orden ≥ 1 en un punto P_0 ($\vec{\alpha}(t_0) = \vec{\beta}(u_0) = \overrightarrow{OP_0}$) es necesario y suficiente que $\{\, \vec{\alpha}\,'(t_0), \vec{\beta}\,'(u_0)\, \}$ sean dependientes (colineales).*

Demostración.- ($\Rightarrow$) Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen contacto de orden ≥ 1, existen sendas parametrizaciones $\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}_1$ tales que $\vec{\alpha}_1\,'(t_1^0) = \vec{\beta}_1\,'(u_1^0)$, luego son colineales los vectores

$$\vec{\alpha}\,'(t_0) = \vec{\alpha}_1\,'(t_1^0)\frac{dt_1}{dt}\Big|_{t_0} \qquad \vec{\beta}\,'(t_0) = \vec{\beta}_1\,'(u_1^0)\frac{du_1}{du}\Big|_{u_0}.$$

($\Leftarrow$) Inversamente, si se tiene $\vec{\beta}\,'(u_0) = \lambda\vec{\alpha}\,'(t_0)$. Busquemos un cambio de parámetro en $\mathcal{C}_2$ del tipo $\vec{\gamma}(t) = \vec{\beta}(at+b)$, tal que se verifique

$$\vec{\gamma}(t_0) = \vec{\alpha}(t_0) = \overrightarrow{OP_0} \qquad \vec{\gamma}\,'(t_0) = \vec{\alpha}\,'(t_0).$$

Por tanto

$$\vec{\beta}(at_0+b) = \vec{\beta}(u_0) \quad \Rightarrow at_0 + b = u_0$$

$$\vec{\gamma}\,'(t_0) = a\vec{\beta}\,'(at_0+b) = a\vec{\beta}\,'(u_0) = a\lambda\vec{\alpha}\,'(t_0) \Rightarrow \lambda a = 1$$

Así, con los valores $a = 1/\lambda$, $b = u_0 - (1/\lambda)t_0$, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen un contacto de orden ≥ 1 en P_0. □

Determinación del orden de contacto de curvas

La definición dada de orden de contacto de dos curvas no permite reconocer inmediatamente si dos curvas dadas presentan un contacto de orden p. En efecto, tal definición no exige que las dos relaciones $i)$ $ii)$ se verifiquen para todos los pares $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3$, $\vec{\beta} : J \to I\!R^3$ de representaciones paramétricas de tales curvas, sino solamente para ciertas parametrizaciones convenientemente elegidas, por lo que hemos de precisar la noción de orden de contacto.

Definición 2.5 *Dos curvas regulares de clase C^k presentan un* contacto de orden p *exactamente ($1 \leq p < k$) en un punto P_0 si tienen en este punto un contacto de orden p al menos y no tienen un contacto de orden p+1 al menos.*

Nos proponemos pues resolver el siguiente problema:

"Sean $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3$, $\vec{\beta} : J \to I\!R^3$ dos representaciones paramétricas de clase C^k de dos curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, satisfaciendo las condiciones:

$$i) \quad \vec{\alpha}(t_0) = \vec{\beta}(u_0) = \overrightarrow{OP_0} \quad ii) \quad \vec{\alpha}^{(r)}(t_0) = \vec{\beta}^{(r)}(u_0) \quad (r \leq p < k).$$

¿Qué condiciones deben satisfacer estas representaciones para que las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que ellas determinan presenten en P_0 un contacto de orden $p+1$ al menos? "

La respuesta a esta pregunta la da la siguiente:

Proposición 2.6 *Sean* $\vec{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$, $\vec{\beta}: J \to \mathbb{R}^3$ *dos representaciones paramétricas regulares de clase* C^k *de dos curvas* $\mathcal{C}_1$ *y* $\mathcal{C}_2$*, satisfaciendo las condiciones:*

$$i) \quad \vec{\alpha}(t_0) = \vec{\beta}(u_0) = \overrightarrow{OP_0} \quad ii) \quad \vec{\alpha}^{(r)}(t_0) = \vec{\beta}^{(r)}(u_0) \quad (r \leq p < k).$$

Para que el contacto de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *sea de orden* p *exactamente en el punto* P_0 *es necesario y suficiente que*

$$\left\{\vec{\alpha}^{(p+1)}(t_0) - \vec{\beta}^{(p+1)}(u_0), \quad \vec{\alpha}\,'(t_0)\right\}$$

sean vectores independientes.

Demostración.- $(\Leftarrow)$ Supongamos que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen en P_0 un contacto de orden $p+1$ al menos y demostremos que

$$\left\{\vec{\alpha}^{(p+1)}(t_0) - \vec{\beta}^{(p+1)}(u_0), \quad \vec{\alpha}\,'(t_0)\right\}$$

son dependientes.

Según la Proposición 2.2, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen un contacto de orden $p+1$ al menos si existe para $\mathcal{C}_2$ un cambio de parámetro $u = h(v)$ tal que $u_0 = h(v_0)$ y $\vec{\gamma} = \vec{\beta} \circ h$ y $\vec{\alpha}$ verifican las relaciones:

$$i) \quad \vec{\alpha}(t_0) = \vec{\gamma}(v_0) = \overrightarrow{OP_0} \quad ii) \quad \vec{\alpha}^{(r)}(t_0) = \vec{\gamma}^{(r)}(v_0) \quad (r \leq p+1).$$

Supongamos $p \geq 1$, entonces $\vec{\beta}\,'(u_0) = \vec{\alpha}\,'(t_0) = \vec{\gamma}\,'(v_0) = \vec{\beta}\,'(u_0)h'(v_0)$. Se sigue que h debe verificar: $h'(v_0) = 1$.

Si $p \geq 2$

$$\vec{\beta}\,''(u_0) = \vec{\alpha}\,''(t_0) = \vec{\gamma}\,''(v_0) = \vec{\beta}\,''(u_0)(h'(v_0))^2 + \vec{\beta}\,'(u_0)h''(v_0).$$

Por consiguiente se debe verificar $h''(v_0) = 0$.

En general, $p \geq r$:

$$\vec{\gamma}^{(r)}(v_0) - \vec{\beta}^{(r)}(u_0)(h'(v_0))^2 - \vec{\beta}\,'(u_0)h^{(r)}(v_0)$$

es combinación lineal de los $\vec{\beta}^{(s)}(u_0)$ $s < r$, con coeficientes los números $h''(v_0)$, $h'''(v_0), \ldots, h^{(r-1)}(v_0)$; se deduce que las relaciones

$$\vec{\beta}^{(r)}(u_0) = \vec{\alpha}^{(r)}(t_0) = \vec{\gamma}^{(r)}(v_0),$$

supuestas verdaderas para $r \leq p$, implican que

$$h^{(r)}(v_0) = 0 \qquad r = 2, 3, \ldots, p.$$

Se tiene entonces, que

$$\vec{\gamma}^{(p+1)}(v_0) - \vec{\beta}^{(p+1)}(u_0) = \vec{\beta}\,'(u_0)h^{(p+1)}(v_0),$$

así pues la relación $\vec{\gamma}^{(p+1)}(v_0) = \vec{\alpha}^{(p+1)}(t_0)$ exige que los vectores

$$\vec{\alpha}^{(p+1)}(t_0) - \vec{\beta}^{(p+1}(u_0), \quad \vec{\alpha}\,'(t_0) = \vec{\beta}\,'(u_0)$$

sean paralelos.

($\Rightarrow$) Si existe λ tal que $\vec{\alpha}^{(p+1)}(t_0) - \vec{\beta}^{(p+1)}(u_0) = \lambda\vec{\beta}\,'(u_0)$. Hacemos el cambio de parámetro en $\mathcal{C}_2$

$$\boxed{u = h(v) = v + \lambda\frac{(v-u_0)^{p+1}}{(p+1)!}},$$

que cumple $h'(v) > 0$ en un entorno de v_0, define pues un cambio de parámetro admisible y $\vec{\gamma}(v) = (\vec{\beta} \circ h)(v)$ y se satisface

$$\vec{\gamma}^{(r)}(v_0) = \vec{\alpha}^{(r)}(t_0) \quad r \leq p+1.$$

Es decir, la curva $\mathcal{C}_2$ tiene un contacto de orden $p+1$ con $\mathcal{C}_1$, en el punto P_0. □

La Proposición 2.4 resulta como un corolario de esta última:

Corolario 2.7 *Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos curvas de clase $k \geq 1$ regulares definidas por las parametrizaciones $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3$, $\vec{\beta} : J \to I\!R^3$. Para que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tengan un contacto de orden ≥ 1 en un punto P_0 ($\vec{\alpha}(t_0) = \vec{\beta}(u_0) = \overrightarrow{OP_0}$) es necesario y suficiente que $\{\, \vec{\alpha}\,'(t_0), \vec{\beta}\,'(u_0) \,\}$ sean dependientes (colineales).*

Demostración.- Si el contacto de las curvas es exactamente 0 equivale a decir que los vectores $\{\vec{\alpha}\,'(t_0) - \vec{\beta}\,'(u_0),\ \vec{\alpha}\,'(t_0)\}$ son linealmente independientes, o lo que es lo mismo que los vectores $\{\vec{\alpha}\,'(t_0),\ \vec{\beta}\,'(u_0)\}$ sean linealmente independientes. Por tanto, los vectores $\{\vec{\alpha}\,'(t_0),\ \vec{\beta}\,'(u_0)\}$ son dependientes si y sólo si dichas curvas tienen un contacto de orden ≥ 1. □

Ejemplo 2.8 La circunferencia $x = 1 - \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ presenta en el origen de coordenadas un contacto de orden 3 con la parábola $x = u^2/2$, $y = u$.

Este contacto se pone en evidencia con la nueva representación paramétrica de la parábola

$$x = \frac{1}{2}\left(v - \frac{v^3}{6}\right)^2, \quad y = v - \frac{v^3}{6}.$$

Uso de parametrizaciones especiales

Hay casos en que el orden de contacto de dos curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ es igual al mayor entero p que verifique

$$\vec{\alpha}\,'(t_0) = \vec{\beta}\,'(u_0), \cdots, \vec{\alpha}^{(p)}(t_0) = \vec{\beta}^{(p)}(u_0).$$

Las proposiciones que demostraremos a continuación prueban que esto ocurre cuando $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ son parametrizaciones tales que tienen como parámetro una de las coordenadas x^i o parámetros naturales.

Proposición 2.9 *Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos curvas de clase C^k $(k \geq 1)$ regulares definidas respectivamente por las parametrizaciones $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ y $\vec{\beta} : J \to \mathbb{R}^3$ que pasan por P_0 para t=0, ($\vec{\alpha}(0) = \vec{\beta}(0) = \overrightarrow{OP_0}$) y suponemos que existe un sistema de coordenadas para el cual las componentes primeras de $\vec{\alpha}(t)$ y $\vec{\beta}(t)$ verifican $\alpha^1(t) = \beta^1(t) = t$, entonces tienen un contacto de orden igual p $(0 \leq p < k)$ si y sólo si*

$$\vec{\alpha}\,'(0) = \vec{\beta}\,'(0), \cdots, \vec{\alpha}^{(p)}(0) = \vec{\beta}^{(p)}(0), \quad \vec{\alpha}^{(p+1)}(0) \neq \vec{\beta}^{(p+1)}(0).$$

Demostración.- $(\Rightarrow)$ Utilizando la Proposición 2.6 de caracterización de contacto de orden p, $\{\vec{\alpha}^{(p+1)}(0) - \vec{\beta}^{(p+1)}(0),\ \vec{\alpha}\,'(0)\}$ son independientes y por tanto $\vec{\alpha}^{(p+1)}(0) - \vec{\beta}^{(p+1)}(0) \neq 0$.

Demostremos que las p primeras derivadas coinciden en P_0:

Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen un contacto de orden al menos p, existe un cambio de parámetro en $\mathcal{C}_2$ $t \mapsto h(t)$ definido en un entorno del 0

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{\beta}(h(t)) \quad |t| < 0,$$

tal que

$$\vec{\gamma}(0) = \vec{\alpha}(0) = \overrightarrow{OP_0}, \qquad \vec{\gamma}^{(r)}(0) = \vec{\alpha}^{(r)}(0) \quad (r \leq p).$$

O con la notación de los ceros de Landau

$$\vec{\beta}(h(t)) - \vec{\alpha}(t) = O(t^{p+1}) \quad |t| < 0$$

Ahora bien por hipótesis, se tiene que $\alpha^1(t) = t,\ \ \beta^1(h(t)) = h(t)$.

De donde, utilizando sólo las primeras componentes de la igualdad vectorial anterior, resulta

$$h(t) = t + O(t^{p+1}) \qquad |t| < 0.$$

Así por composición de desarrollos, se obtiene

$$\vec{\beta}(h(t)) = \vec{\beta}(t + O(t^{p+1})) = \vec{\beta}(t) + O(t^{p+1}).$$

$$\vec{\alpha}(t) - \vec{\beta}(t) = \left(\vec{\alpha}(t) - \vec{\beta}(h(t))\right) + \left(\vec{\beta}(h(t)) - \vec{\beta}(t)\right) = O(t^{p+1}).$$

O sea

$$\vec{\alpha}(0) = \vec{\beta}(0); \quad \vec{\alpha}^{(r)}(0) = \vec{\beta}^{(r)}(0) \quad (r \leq p); \quad \vec{\alpha}^{(p+1)}(0) \neq \vec{\beta}^{(p+1)}(0).$$

$(\Leftarrow)$ Ya que la primera componente de $\vec{\alpha}^{(p+1)}(0) - \vec{\beta}^{(p+1)}(0)$ es 0 y la de $\vec{\alpha}\,'(0)$ es 1, ambos son independientes. □

Proposición 2.10 *Dos curvas paramétricas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ de clase C^k tienen un contacto de orden p en un punto regular P_0 si y sólo si para sus representaciones naturales $\vec{\alpha}(s), \vec{\beta}(\sigma)$, se tienen las siguientes relaciones en P_0*

$$\vec{\alpha}(s_0) = \vec{\beta}(\sigma_0), \;\; \dot{\vec{\alpha}}(s_0) = \dot{\vec{\beta}}(\sigma_0), \cdots, \overrightarrow{\overset{(p)}{\alpha}}(s_0) = \overrightarrow{\overset{(p)}{\beta}}(\sigma_0),$$

$$\overrightarrow{\overset{(p+1)}{\alpha}}(s_0) \neq \overrightarrow{\overset{(p+1)}{\beta}}(\sigma_0).$$

Demostración.- $(\Leftarrow)$ Como tanto $\|\dot{\vec{\alpha}}(s)\| = 1$ como $\|\dot{\vec{\beta}}(\sigma)\| = 1$, se tiene que

$$\dot{\vec{\alpha}}(s) \cdot \dot{\vec{\alpha}}(s) = 1$$

$$2\,\ddot{\vec{\alpha}}(s) \cdot \dot{\vec{\alpha}}(s) = 0$$

$$2\,\dddot{\vec{\alpha}}(s) \cdot \dot{\vec{\alpha}}(s) + 2\ddot{\vec{\alpha}}(s)^2 = 0$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$2\,\overrightarrow{\overset{(p+1)}{\alpha}}(s) \cdot \dot{\vec{\alpha}}(s) + \sum_{r=1}^{p-1} c_r^p \;\overrightarrow{\overset{(p-r+1)}{\alpha}}(s) \cdot \overrightarrow{\overset{(r+1)}{\alpha}}(s) = 0$$

Análogamente para $\vec{\beta}(\sigma)$. Luego

$$\left(\overrightarrow{\overset{(p+1)}{\alpha}}(s_0) - \overrightarrow{\overset{(p+1)}{\beta}}(\sigma_0) \right) \cdot \dot{\vec{\alpha}}(s) = 0.$$

Y como ambos vectores son no nulos, ellos son linealmente independientes.

$(\Rightarrow)$ Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen un contacto exactamente igual p en P_0, se verifica:

$$\left\{ \overrightarrow{\overset{(r)}{\alpha}}(s_0) - \overrightarrow{\overset{(r)}{\beta}}(\sigma_0), \quad \dot{\vec{\alpha}}(s_0) \right\} \quad \text{son dependientes} \quad (r \leq p),$$

de donde se deducirá

$$\overrightarrow{\overset{(r)}{\alpha}}(s_0) = \overrightarrow{\overset{(r)}{\beta}}(\sigma_0), \quad (r \leq p).$$

En efecto:

Si el orden de contacto entre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en P_0 es al menos uno $(r = 1)$, entonces $\{\dot{\vec{\alpha}}(s_0), \dot{\vec{\beta}}(\sigma_0)\}$ son dependientes; o sea, $\dot{\vec{\alpha}}(s_0) = \lambda \dot{\vec{\beta}}(\sigma_0)$, con lo que $\lambda = \pm 1$. Y cambiando de orientación una de las curvas, si es necesario, podemos suponer que $\lambda = 1$.

Si el orden de contacto es mayor o igual que dos ($r = 2$)

$$\left\{\ddot{\vec{\alpha}}(s_0) - \ddot{\vec{\beta}}(\sigma_0), \quad \dot{\vec{\alpha}}(s_0)\right\} \quad \text{son dependientes.}$$

Y además, usando la fórmula hallada en la demostración de la otra implicación,

$$\left(\ddot{\vec{\alpha}}(s_0) - \ddot{\vec{\beta}}(\sigma_0)\right) \cdot \dot{\vec{\alpha}}(s_0) = 0.$$

De ambas surge que $\ddot{\vec{\alpha}}(s_0) - \ddot{\vec{\beta}}(\sigma_0) = 0$. Procediendo de la misma forma, si dicha relación es válida para $s < r$, es válida, utilizando la fórmula citada, para r.

Finalmente, si el contacto es exactamente p

$$\left\{\overrightarrow{\overset{(p+1)}{\alpha}}(s_0) - \overrightarrow{\overset{(p+1)}{\beta}}(\sigma_0), \quad \dot{\vec{\alpha}}(s_0)\right\} \quad \text{son independientes.}$$

Por tanto, $\overrightarrow{\overset{(p+1)}{\alpha}}(s_0) - \overrightarrow{\overset{(p+1)}{\beta}}(\sigma_0) \neq 0.$ □

Interpretación métrica de la noción de contacto

Consideremos dos curvas paramétricas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que pasan por un punto P_0. Sea P' un punto de $\mathcal{C}_1$ y P'' un punto de $\mathcal{C}_2$ tal que la diferencia del valor del parámetro natural para P' y P_0 en $\mathcal{C}_1$, así como la diferencia de valores del parámetro natural de P'' y P_0 en $\mathcal{C}_2$ son iguales a h. Esto significa que los arcos P_0P' y P_0P'' tienen longitud $|h|$ y P' y P'' están ambos situados respecto a P_0 en la dirección del crecimiento del parámetro en las correspondiente curvas si $h > 0$ o ambos están en la dirección decreciente del parámetro si $h < 0$.

Con estas notaciones se tiene la siguiente

Proposición 2.11 *Dos curvas paramétricas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ regulares de clase C^k tienen un contacto de orden p en un punto regular P_0 si y sólo si, para sus representaciones naturales, el vector $\overrightarrow{P'P''} = o(h^p)$,* [1] *pero $\overrightarrow{P'P''} \neq o(h^{p+1})$ cuando $h \to 0$ (o $P', P'' \to P$).*

Demostración.- Sea el punto P_0 correspondiente a los valores s_0 y σ_0 de los parámetros naturales s y σ de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente.

Entonces, los vectores posición de P' y P'' son $\overrightarrow{OP'} = \vec{\alpha}(s_0 + h)$ y $\overrightarrow{OP''} = \vec{\beta}(\sigma_0 + h)$, de donde

$$\overrightarrow{P''P'} = \vec{\alpha}(s_0 + h) - \vec{\beta}(\sigma_0 + h) =$$

(1)

$$\overrightarrow{P'P''} = o(h^p) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\overrightarrow{P'P''}}{h^p} = 0.$$

$$= \vec{\alpha}(s_0) - \vec{\beta}(\sigma_0) + \frac{h}{1!}\left(\dot{\vec{\alpha}}(s_0) - \dot{\vec{\beta}}(\sigma_0)\right) + \cdots + \frac{h^p}{p!}\left(\overrightarrow{\overset{(p)}{\alpha}}(s_0) - \overrightarrow{\overset{(p)}{\beta}}(\sigma_0)\right) +$$

$$+\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\left(\overrightarrow{\overset{(p+1)}{\alpha}}(s_0) - \overrightarrow{\overset{(p+1)}{\beta}}(\sigma_0)\right) + \vec{\varepsilon}$$

siendo $\vec{\varepsilon} = o(h^{p+1})$.

Para que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tengan un contacto de orden p exactamente en P_0 es necesario y suficiente que el desarrollo anterior se inicie en el término

$$\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\left(\overrightarrow{\overset{(p+1)}{\alpha}}(s_0) - \overrightarrow{\overset{(p+1)}{\beta}}(\sigma_0)\right),$$

lo que equivale a decir que $\overrightarrow{P''P'} = o(h^p)$ y $\overrightarrow{P''P'} = O(h^{p+1})$. □

Nota 2.12 Obsérvese que desde nuestro punto de vista una curva paramétrica y su opuesta no tienen contacto, aunque el correspondiente conjunto de punto coincidan.

Determinación de orden de contacto entre curvas cuando una de ellas viene dada en forma implícita

Veamos previamente que el orden de contacto se conserva por difeomorfismos.

Proposición 2.13 *Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos curvas de clase C^k que tienen un contacto de orden p exactamente $(0 \leq p \leq k)$ en P_0 y si H es un difeomorfismo de clase C^k, definido en un entorno de P_0 que contiene a las curvas dadas, entonces las curvas imágenes por H ($\mathcal{C}_1^*$ y $\mathcal{C}_2^*$) tienen un contacto de orden p exactamente en $P_0^* = H(P_0)$.*

Demostración.- Si $\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3$ y $\overrightarrow{\beta} : J \to I\!R^3$ son representaciones paramétricas de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, satisfaciendo

$$i) \quad \vec{\alpha}(t_0) = \vec{\beta}(u_0) = \overrightarrow{OP_0} \quad ii) \quad \vec{\alpha}^{(r)}(t_0) = \vec{\beta}^{(r)}(u_0) \quad (r \leq p \leq k),$$

entonces, $\overrightarrow{\alpha^*} : I \to I\!R^3$ definida por $\vec{\alpha}^*(t) = H(\vec{\alpha}(t))$ es una representación paramétrica de $\mathcal{C}_1^*$; así mismo, $\overrightarrow{\beta^*} : J \to I\!R^3$ definida por $\vec{\beta}^*(t) = H(\vec{\beta}(t))$ es una representación paramétrica de $\mathcal{C}_2^*$. Y se tiene:

$$i) \quad \vec{\alpha}^*(t_0) = \vec{\beta}^*(u_0) = \overrightarrow{OP_0^*}.$$

Calculando las derivadas $\vec{\alpha}^{*\,(r)}(t)$ y $\vec{\beta}^{*\,(r)}(u)$, utilizando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que

$$\frac{d^r\alpha^i}{dt^r}(t_0) = \frac{d^r\beta^i}{dt^r}(u_0) \quad (i = 1, 2, 3; \quad r \leq p),$$

resulta:

$$ii) \quad \vec{\alpha}^{*\,(r)}(t_0) = \vec{\beta}^{*\,(r)}(u_0) \qquad (r \leq p \leq k).$$

Lo que nos dice que las curvas $\mathcal{C}_1^*$ y $\mathcal{C}_2^*$ tienen un contacto de orden p al menos en $H(P_0)$.

Haciendo el mismo razonamiento con H^{-1}, obtenemos el resultado deseado. □

Aplicando este resultado, la siguiente proposición nos permite calcular el orden de contacto de dos curvas cuando una de ellas viene dada en forma implícita:

Proposición 2.14 *Sean* $\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3$ *una representación paramétrica de una curva regular* $\mathcal{C}_1$ *de clase* C^k *que pasa por* P_0 $(\vec{\alpha}(t_0) = \overrightarrow{OP_0})$, *$U$ un entorno de* P_0, $f : U \to I\!R$ *y* $g : U \to I\!R$ *funciones de clase* C^k *e independientes y* $\mathcal{C}_2$ *la curva regular pasando por* P_0 *implícitamente definida por las ecuaciones:*

$$f(x, y, z) = f(P_0) \qquad g(x, y, z) = g(P_0).$$

Para que $\mathcal{C}_1$ *y* $\mathcal{C}_2$ *tengan un contacto de orden p al menos en* P_0 $(0 \leq p \leq k)$, *es necesario y suficiente que las funciones F y G definidas en un entorno de* t_0 *por*

$$F(t) = f(\vec{\alpha}(t)) \qquad G(t) = g(\vec{\alpha}(t))$$

verifiquen $F^{(r)}(t_0) = 0, \quad G^{(r)}(t_0) = 0 \quad (r \leq p)$.

Demostración.- Observemos que si f y g son independientes (es decir, el rango de la matriz Jacobiana de f y g en P_0 es dos), el teorema de la función implícita nos dice que podemos despejar dos de las variables en función de una de ellas. Podemos suponer, para fijar ideas, que

$$\frac{D(f, g)}{D(x, y)}(P_0) \neq 0,$$

haciendo, si es necesario, una renumeración de las coordenadas. Obteniéndose la representación paramétrica de la curva $\mathcal{C}_2$ que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\overrightarrow{\beta} : J \to I\!R^3 \qquad \vec{\beta}(z) = (\beta^1(z), \beta^2(z), z),$$

siendo β^1 y β^2 funciones diferenciables de clase C^k, satisfaciendo

$$f(\beta^1(z), \beta^2(z), z) = f(P_0) \qquad g(\beta^1(z), \beta^2(z), z) = g(P_0),$$

y verificándose $\vec{\beta}\,'(z_0) \neq 0$.

Definamos ahora la aplicación $H : U \subset I\!R^3 \to I\!R^3$ por

$$H(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), z).$$

Como $J_{P_0}(H) \neq 0$, H es difeomorfismo al menos en un entorno V de P_0, $V \subset U$.

Nos quedamos con los trozos de curvas de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ contenidos en V y seguimos denotando por $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ sus representaciones paramétricas. Sus imagenes por H $\vec{\alpha}^* = H \circ \vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}^* = H \circ \vec{\beta}$ tienen en $H(P_0)$ un contacto de orden p al menos (por la Proposición 2.13). Por tanto, siendo:

$$\vec{\alpha}^*(t) = H(\vec{\alpha}(t)) = (f(\vec{\alpha}(t)), g(\vec{\alpha}(t)), \alpha^3(t)) = (F(t), G(t), \alpha^3(t)),$$

$$\vec{\beta}^*(z) = H(\vec{\beta}(z)) = (f(\vec{\beta}(z)), g(\vec{\beta}(z)), z) = (f(P_0), g(P_0), z),$$

debe existir un cambio de parámetro en $\mathcal{C}_2$, $z = z(u)$, tal que las derivadas hasta el orden p en $H(P_0)$ de $\vec{\alpha}^*(t)$ y $\vec{\gamma}^*(u) = \vec{\beta}^*(z(u))$ coincidan. Pero

$$\vec{\alpha}^{*\,(r)}(t) = (F^{(r)}(t), G^{(r)}(t), \alpha^{3\,(r)}(t))$$

$$\vec{\gamma}^{*\,(r)}(z) = (0, 0, \gamma^{*3(r)}(u)) \qquad (1 \leq r \leq p).$$

Por lo que tiene que verificarse:

$$F^{(r)}(t_0) = 0 \quad G^{(r)}(t_0) = 0 \quad (r \leq p).$$

Relaciones que también se obtienen sin considerar la parametrización γ de $\mathcal{C}_2$, teniendo en cuenta que:

$$\{\vec{\alpha}^{*(r)}(t_0) - \vec{\beta}^{*(r)}(z_0), \vec{\alpha}\,'(z_0)\} = \{(F^{(r)}(t_0), G^{(r)}(t_0), \alpha^{3(r)}(t_0)), (0,0,1)\}$$

son dependientes si y sólo si $F^{(r)}(t_0) = G^{(r)}(t_0) = 0 \quad (r \leq p)$.

Recíprocamente:

Consideremos una nueva parametrización del segmento rectilíneo $\mathcal{C}_2^*$

$$\vec{\gamma}^*(t) = \vec{\beta}^*(f(P_0), g(P_0), \alpha^3(t)),$$

efectuando el cambio de parámetro $z = \alpha^3(t)$; se tiene

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \frac{d\alpha^3}{dt}(t_0) > 0,$$

si suponemos que se recorre la curva $\mathcal{C}_1^*$ adecuadamente. Resulta entonces que:

$$\vec{\alpha}^{*\,(r)}(t_0) = \vec{\gamma}^{*\,(r)}(t_0) \quad (r \leq p).$$

Por tanto, las curvas $\mathcal{C}_1^*$ y $\mathcal{C}_2^*$ presentan un contacto de orden p al menos en $H(P_0)$, y por consiguiente lo mismo ocurre con $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en P_0. □

Nota 2.15 Si $f, g, \vec{\alpha}$ son suficientemente diferenciables

$$F(t) - F(t_0) = O((t-t_0)^{r+1}) \qquad G(t) - G(t_0) = O((t-t_0)^{s+1})$$

y el orden de contacto de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en P_0 es exactamente igual al $\min\{r, s\} - 1$

Si $p = \min\{r, s\} - 1$, entonces

$$\left\{\vec{\alpha}^{*(p+1)}(t_0) - \vec{\gamma}^{*(p+1)}(t_0),\ \vec{\alpha}^{*'}(t_0)\right\} = \left\{(F^{(p+1)}(t_0), G^{(p+1)}(t_0), 0),\ (0,0,1)\right\}$$

son independientes si y sólo si

$$F^{(p+1)}(t_0) \neq 0 \quad o \quad G^{(p+1)}(t_0) \neq 0$$

Ejemplo 2.16 El contacto de la parábola $\left(x = t^2/2,\ y = t\right)$ con la circunferencia definida implícitamente por $x^2 + y^2 - 2x = 0$ es de orden exactamente igual a 3.

2.2 Tangente a una curva paramétrica

Definición 2.17 *La* tangente *a una curva $\mathcal{C}$ en un punto P es la recta que tiene un contacto de orden como mínimo 1 con la curva en P.*

Proposición 2.18 *Una curva paramétrica de clase C^1 tiene una tangente en todo punto regular. El vector $\dot{\vec{\alpha}}$ es el vector unitario de la recta.*

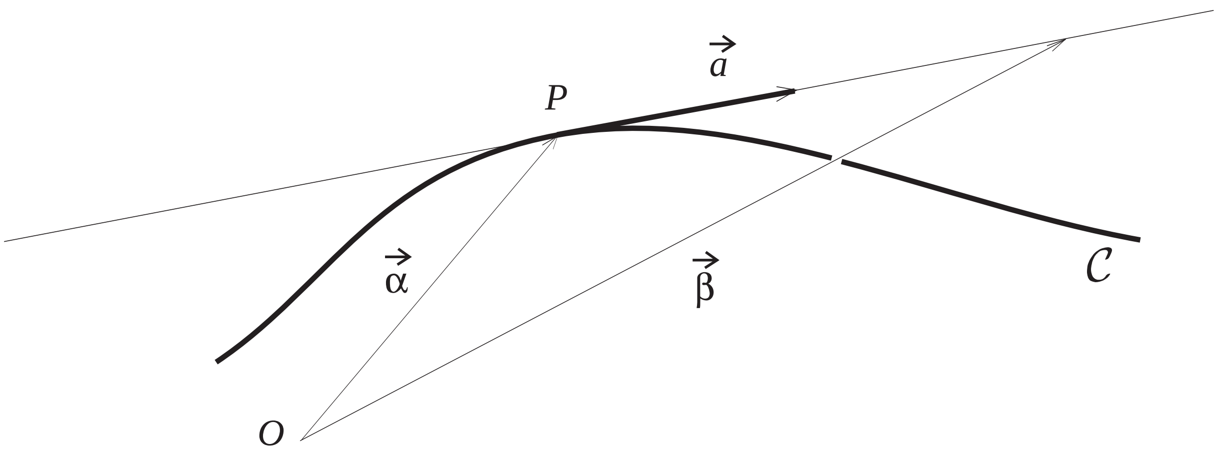
Demostración.- Sea la representación natural de la curva $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$, y el punto P correspondiente al valor s_0 del parámetro. La ecuación de una recta que pasa por P es de la forma

$$\vec{\beta}(t) = t\vec{a} + \vec{\alpha}(s_0),$$

donde $\vec{a}$ es un vector unitario en la dirección de la recta y t es el parámetro natural en la recta.

De acuerdo con la Proposición 2.10 de caracterización de orden de contacto de dos curvas con parametrizaciones naturales, la recta tiene un contacto de primer orden con la curva en el punto P si y sólo si $\dot{\vec{\alpha}}(s_0) = \dot{\vec{\beta}}(0) = \vec{a}$.

Así $\dot{\vec{\alpha}}(s_0)$ es el vector unitario que determina la recta tangente. □



La ecuación paramétrica de la tangente en un punto P ($\overrightarrow{OP} = \vec{\alpha}(s_0)$) es

$$\vec{\beta}(t) = \vec{\alpha}(s_0) + t\,\dot{\vec{\alpha}}(s_0),$$

siendo t el parámetro natural.

La ecuación de la tangente se puede expresar también como

$$\left(\vec{\beta}(t) - \vec{\alpha}(s_0)\right) \times \dot{\vec{\alpha}}(s_0) = \vec{0},$$

ya que ambos vectores de este producto vectorial son colineales.

Nota 2.19 Una curva puede tener un contacto de orden p con la tangente si es de clase C^k y son nulas las derivadas

$$\ddot{\vec{\alpha}}(s_0), \ldots, \overrightarrow{\overset{(p)}{\alpha}}(s_0).$$

"El orden de contacto es entonces uno menos que el orden de la primera derivada no nula".

Ecuación de la recta tangente en una parametrización general

Si una curva está dada por una parametrización general $\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3$, $t \mapsto \vec{\alpha}(t)$ entonces $\vec{\alpha}\,'(t)$ tiene también la dirección de la tangente pero no es necesariamente un vector unitario, y la ecuación paramétrica de la recta es

$$\vec{\beta}(u) = \vec{\alpha}(t_0) + u\,\vec{\alpha}\,'(t_0),$$

donde u es un parámetro general, no necesariamente natural. Esta ecuación la podemos poner de forma equivalente

$$\left(\vec{\beta}(u) - \vec{\alpha}(t_0)\right) \times \vec{\alpha}\,'(t_0) = \vec{0}.$$

O, considerando las funciones coordenadas

$$\vec{\beta}(u) = (X, Y, Z) \qquad \vec{\alpha}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$$

$$\frac{X - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Podemos también definir la recta tangente en un punto P_0 a una curva $\mathcal{C}$, como la posición límite de la recta que une P_0 con un punto P en la curva próximo a él.

La ecuación de la recta P_0P es

$$\vec{\beta}(u) = \vec{\alpha}(t_0) + \frac{u}{t - t_0}(\vec{\alpha}(t) - \vec{\alpha}(t_0)).$$

Si la representación paramétrica es de clase C^1, obtenemos como

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\vec{\alpha}(t)-\vec{\alpha}(t_0)}{t-t_0} = \vec{\alpha}\,'(t_0).$$

Nota 2.20 Los puntos donde el orden de contacto de la curva con la tangente son de orden superior a 1, pueden ser reconocidos, sin introducir implícitamente la representación paramétrica natural.

Pues es fácil establecer que la propiedad que corresponde a ser $\vec{\ddot{\alpha}}$, $\overrightarrow{\dddot{\alpha}}$, ..., $\overrightarrow{\overset{(p)}{\alpha}}$ nulas en s_0, es que las derivadas $\vec{\alpha}\,'', \vec{\alpha}\,''', \dots, \vec{\alpha}^{(p)}$ sean colineales con $\vec{\alpha}\,'$.

Para lo cual también nos podremos fijar en las proposiciones 2.6 y 2.10.

2.3 Contacto de una curva con un plano. Plano osculador

Sea P_0 un punto común de una curva $\mathcal{C}$ con un plano Π, y sea P un punto variable de la curva tal que la longitud de arco entre P_0 y P sea h. Denotaremos por d_h la distancia de P al plano Π.

Definición 2.21 *Una curva y el plano tienen un* contacto de orden al menos *p en P_0 si* $d_h = o(h^p)$.

Definición 2.22 *Se llama* plano osculador *en punto P_0 de una curva al plano con mayor orden de contacto posible con la curva en P_0.*

Proposición 2.23 *Una curva paramétrica $\overrightarrow{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2 tiene un plano osculador en todo punto regular s_0 en el que la derivada segunda respecto al parámetro arco es no nula: $\vec{\ddot{\alpha}}(s_0) \neq \vec{0}$.*

Este plano es paralelo a los vectores $\vec{\dot{\alpha}}(s_0)$ y $\vec{\ddot{\alpha}}(s_0)$, y el orden de contacto con la curva es ≥ 2.

Como consecuencia de esta proposición la ecuación del plano osculador en un punto P_0 es:

$$\left[\vec{\beta}-\vec{\alpha}(s_0)\ \ \vec{\dot{\alpha}}(s_0)\ \ \vec{\ddot{\alpha}}(s_0)\right] = 0.$$

Que expresada en coordenadas, esta ecuación es

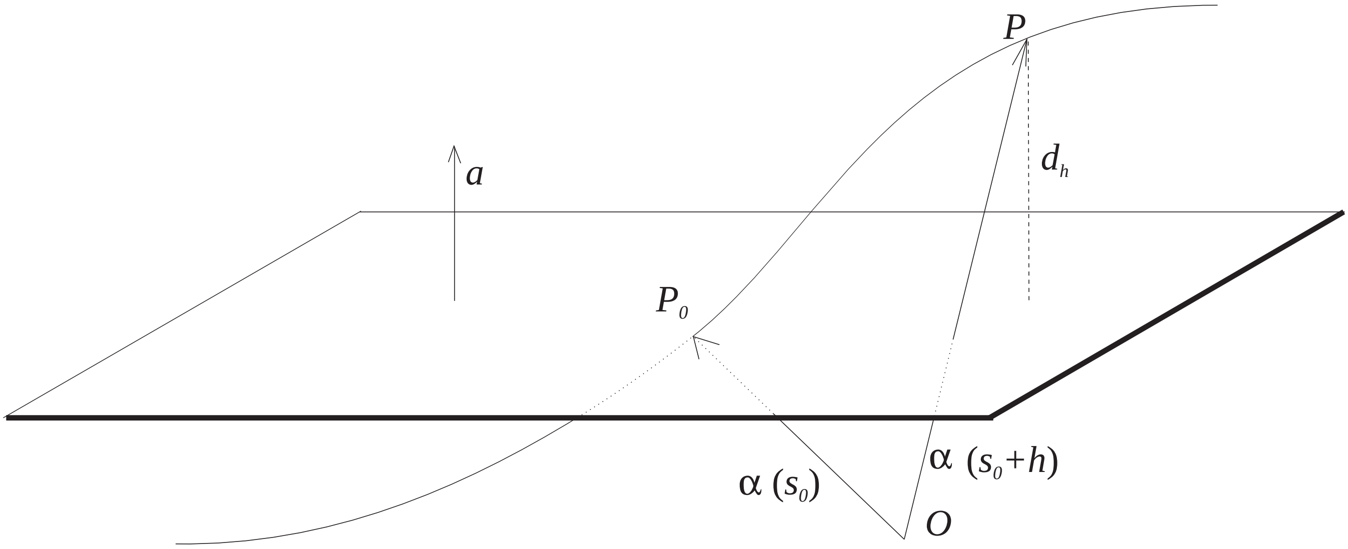
$$\begin{vmatrix} X-x(s_0) & Y-y(s_0) & Z-z(s_0) \\ \dot{x}(s_0) & \dot{y}(s_0) & \dot{z}(s_0) \\ \ddot{x}(s_0) & \ddot{y}(s_0) & \ddot{z}(s_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Demostración.- La ecuación del plano que pasa por el punto P_0 y es perpendicular a un vector unitario $\vec{a}$ es:

$$(\vec{\beta} - \vec{\alpha}(s_0)) \cdot \vec{a} = 0.$$

La distancia de un punto P de la curva con vector de posición $\vec{\alpha}(s_0 + h)$ a dicho plano es:

$$d_h = |(\vec{\alpha}(s_0 + h) - \vec{\alpha}(s_0)) \cdot \vec{a}| \,.$$



Usando la fórmula de Taylor,

$$\vec{\alpha}(s_0 + h) - \vec{\alpha}(s_0) = h\dot{\vec{\alpha}}(s_0) + \frac{h^2}{2!}\ddot{\vec{\alpha}}(s_0) + \vec{\varepsilon},$$

siendo $\vec{\varepsilon} = o(h^2)$.

Consecuentemente, salvo signo,

$$d_h = h\dot{\vec{\alpha}}(s_0) \cdot \vec{a} + \frac{h^2}{2!}\ddot{\vec{\alpha}}(s_0) \cdot \vec{a} + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{a}.$$

Los planos con orden de contacto 1 deben verificar:

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{d_h}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\dot{\vec{\alpha}}(s_0) \cdot \vec{a} + \frac{h}{2!}\ddot{\vec{\alpha}}(s_0) \cdot \vec{a} + \frac{1}{h}\vec{\varepsilon} \cdot \vec{a} \right) = \dot{\vec{\alpha}}(s_0) \cdot \vec{a} = 0.$$

Por tanto son todos aquellos que contienen a la tangente.

Entre todos estos tiene un contacto de orden dos:

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{d_h}{h^2} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{2!}\ddot{\vec{\alpha}}(s_0) \cdot \vec{a} + \frac{1}{h^2}\vec{\varepsilon} \cdot \vec{a} \right) = \frac{1}{2}\ddot{\vec{\alpha}}(s_0) \cdot \vec{a} = 0,$$

aquél que además contiene al vector $\ddot{\vec{\alpha}}(s_0)$. Pero como los vectores $\dot{\vec{\alpha}}(s_0)$ y $\ddot{\vec{\alpha}}(s_0)$ son independientes $(\dot{\vec{\alpha}}(s_0) \perp \ddot{\vec{\alpha}}(s_0))$, ambos determinan el plano buscado al cual el vector $\vec{a}$ es perpendicular.

Así podemos determinar $\vec{a}$, salvo signo:

$$\vec{a} = \frac{\dot{\vec{\alpha}}(s_0) \times \ddot{\vec{\alpha}}(s_0)}{\left\| \dot{\vec{\alpha}}(s_0) \times \ddot{\vec{\alpha}}(s_0) \right\|} \quad \text{o bien} \quad \vec{a} = -\frac{\dot{\vec{\alpha}}(s_0) \times \ddot{\vec{\alpha}}(s_0)}{\left\| \dot{\vec{\alpha}}(s_0) \times \ddot{\vec{\alpha}}(s_0) \right\|}$$

□

Nota 2.24 En general el plano osculador en un punto no tiene porqué tener un orden de contacto superior a dos. Puede tenerlo si, por ejemplo, $\overrightarrow{\dddot{\alpha}}(s_0) = 0$.

Nota 2.25 Si $\ddot{\vec{\alpha}}(s_0) = 0$ el plano osculador en el punto s_0, o bien puede no existir o sí existir, en cuyo caso está determinado por las derivadas de orden superior a dos.

Por ejemplo, si $\ddot{\vec{\alpha}}(s_0) = 0$ y la primera derivada de $\vec{\alpha}$ en s_0 que es linealmente independiente de $\dot{\vec{\alpha}}(s_0)$ es $\overrightarrow{\overset{(k)}{\alpha}}(s_0)$, entonces el plano osculador existe y es paralelo a los vectores $\dot{\vec{\alpha}}(s_0)$ y $\overrightarrow{\overset{(k)}{\alpha}}(s_0)$, y el orden de contacto no es menor que k.

Ecuación del plano osculador en una parametrización general

Consideremos ahora el caso de una parametrización general $\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3$, no necesariamente natural y sea t_0 un punto regular de esta parametrización. Introduciendo el parámetro natural tenemos

$$\vec{\alpha}\,' = \dot{\vec{\alpha}}\frac{ds}{dt} \qquad\qquad \vec{\alpha}\,'' = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{\alpha}}\right)\frac{ds}{dt} + \dot{\vec{\alpha}}\frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{\vec{\alpha}}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \dot{\vec{\alpha}}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Entonces

$$\vec{\alpha}\,' \times \vec{\alpha}\,'' = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \dot{\vec{\alpha}} \times \ddot{\vec{\alpha}}.$$

En puntos regulares, los vectores $\vec{\alpha}\,' \times \vec{\alpha}\,''$ y $\dot{\vec{\alpha}} \times \ddot{\vec{\alpha}}$ son así colineales y, en consecuencia, podemos reemplazar uno por otro en la ecuación del plano osculador, obteniéndose

$$\left[\vec{\beta} - \vec{\alpha}(t_0)\ \ \vec{\alpha}\,'(t_0)\ \ \vec{\alpha}\,''(t_0)\right] = 0$$

en forma vectorial y, en coordenadas:

$$\begin{vmatrix} X - x(t_0) & Y - y(t_0) & Z - z(t_0) \\ x\,'(t_0) & y\,'(t_0) & z\,'(t_0) \\ x\,''(t_0) & y\,''(t_0) & z\,''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Una caracterización del plano osculador

Proposición 2.26 *Sea $\mathcal{C}$ una curva paramétrica de clase C^k $(k \geq 1)$ que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, definido por la parametrización $\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3$, tal que $\vec{\alpha}(0) = \overrightarrow{OP_0}$. Para que el plano Π pasando por P_0 de ecuación $f(x,y,z) = ax + by + cz + d = 0$, sea el plano osculador a $\mathcal{C}$ en P_0 es necesario y suficiente que, si $F(t) = f(\vec{\alpha}(t))$,*

$$F(t) = o(t^2).$$

Demostración.- El desarrollo en serie de Taylor de F en $t_0 = 0$:

$$F(t) = F(0) + \frac{t}{1!}F'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{t^p}{p!}F^{(p)}(0) + o(t^p) =$$

$$= (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) + \frac{t}{1!}(ax_0' + by_0' + cz_0') + \frac{t^2}{2!}(ax_0'' + by_0'' + cz_0'') + o(t^2).$$

Como los tres primeros términos de este desarrollo se anulan si y sólo si Π es el plano osculador en P_0, se tiene el resultado anunciado. □

Nota 2.27 El orden de contacto de la curva con el plano osculador es exactamente $p < k$ si en $t = 0$

$$F(t) = o(t^p) \qquad F(t) \neq O(t^{p+1}).$$

La curva y el plano tienen, por definición un contacto de orden p exactamente si $d_h = o(h^p)$ *y* $d_h \neq O(h^{p+1})$. O sea, si

$$d_h = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\overrightarrow{\overset{(p+1)}{\alpha}} \cdot \vec{a} + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{a}, \qquad \overrightarrow{\overset{(p+1)}{\alpha}} \cdot \vec{a} \neq 0 \quad \vec{\varepsilon} = o(h^{p+1}).$$

Expresando las derivadas de $\vec{\alpha}$ respecto del parámetro arco en función de las derivadas respecto al parámetro t en el punto P_0, y viceversa, se obtiene la caracterización de orden de contacto enunciada.

Ejemplos

Ejemplo 2.28 *Se consideran dos curvas regulares de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$ admitiendo las dos el origen como centro de simetría y con mismas tangentes en el origen, entonces el contacto de estas curvas en el origen es necesariamente de orden par.*

Supongamos que el eje OX coincide con la recta tangente a ambas curvas en el origen y que en un entorno de dicho punto se expresan por $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$. Si tienen un contacto de orden p:

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_1'(0) = f_2'(0), \quad f_1^{(p)}(0) = f_2^{(p)}(0), \quad f_1^{(p+1)}(0) \neq f_2^{(p+1)}(0).$$

Consideremos la función $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$, que para $|x|$ suficientemente pequeño y $0 < \theta < 1$, admite el siguiente fórmula de Mac-Laurin:

$$F(x) = F(0) + F'(0)\,x + \cdots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0)\,x^p + \frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(\theta x)\,x^{p+1},$$

que se reduce en nuestro caso a:

$$F(x) = \frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(\theta x)\,x^{p+1},$$

y como $F(x)$ cambia de signo y $F^{(p+1)}(\theta x)$ lo mantiene, resulta que p es par.

Ejemplo 2.29 El plano osculador $f(x,y,z)=ax+by+cz+d=0$ a la curva

$$x=t, \qquad y=t^2, \qquad z=t^4,$$

en el punto $(0,0,0)$, se determina a partir de la definición de la función $F(t)=f\big(x(t),y(t),z(t)\big)=at+bt^2+ct^4+d$, poniendo:

$$F(0)=d=0; \qquad F'(0)=a+2bt+4ct^3{}_{|0}=0; \qquad F''(0)=2b+12ct^2{}_{|0}=0,$$

de donde resulta que $a=0, b=0$ y $d=0$, y por tanto $c\neq 0$; es decir, que la ecuación el plano osculador es $z=0$.

El orden de contacto de la curva con el plano osculador es exactamente 3, pues $F'''(0)=0$ y $F^{(IV)}(0)=24c\neq 0$.

Ejemplo 2.30 *Los puntos de tangencia de las circunferencias de orden de contacto al menos tres (circunferencias superosculatrices) con la elipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, están en los vértices (puntos de intersección con los ejes) de dicha elipse.*

Sea la parametrización de la elipse $x=a\cos t$, $y=b\,\mathrm{sen}\,t$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ y la ecuación $f(x,y)=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0$ de una circunferencia genérica con centro en (α,β) y de radio r. Para que ésta tenga al menos un contacto de orden tres, en un punto correspondiente al parámetro t, deben verificarse las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
F(t) &= f(a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t)=(a\cos t-\alpha)^2+(b\,\mathrm{sen}\,t-\beta)^2-r^2=0\\
F'(t) &= -2a(a\cos t-\alpha)\,\mathrm{sen}\,t+2b(b\,\mathrm{sen}\,t-\beta)\cos t=0\\
F''(t) &= 2a^2\,\mathrm{sen}^2\,t-2a(a\cos t-\alpha)\cos t+2b^2\cos^2 t-2b(b\,\mathrm{sen}\,t-\beta)\,\mathrm{sen}\,t=0\\
F'''(t) &= 4a^2\,\mathrm{sen}\,t\cos t+2a(a\cos t-\alpha)\,\mathrm{sen}\,t+2a^2\,\mathrm{sen}\,t\cos t+\\
&\quad -4b^2\,\mathrm{sen}\,t\cos t-2b(b\,\mathrm{sen}\,t-\beta)\cos t-2b^2\,\mathrm{sen}\,t\cos t=0.
\end{aligned}$$

De $F'(t)=0$ y de $F'''(t)=0$ surge que

$$6(a^2-b^2)\,\mathrm{sen}\,t\cos t=0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{sen}\,t=0 \ \text{ ó } \ \cos t=0.$$

Luego los puntos donde la elipse tiene una circunferencia superosculatriz corresponden a $t=0,\pi/2,\pi,3\pi/2$.

1) En el punto $(1,0)$ correspondiente a $t=0$:

$$F(0)=(a-\alpha)^2+\beta^2-r^2=0, \qquad F''(0)=-2a(a-\alpha)+2b^2=0,$$
$$F'(0)=-2b\beta=0, \qquad F'''(0)=2b\beta=0,$$

de donde se sigue que la circunferencia tiene centro en $(\alpha,\beta)=((a^2-b^2)/a,0)$ y radio $r=b^2/a$.

2) Para $t=\pi/2$, se obtiene similarmente $(\alpha,\beta)=(0,(b^2-a^2)/b)$ y $r=a^2/b$.
3) Para $t=\pi$, $(\alpha,\beta)=((b^2-a^2)/a,0)$ y $r=b^2/a$.
4) Para $t=3\pi/2$, $(\alpha,\beta)=(0,(a^2-b^2)/b)$ y $r=a^2/b$.

TEMA III

Triedro de Frenet y Fórmulas de Frenet

Un método general para obtener *invariantes* locales de una curva consiste en asociar una referencia invariante a cada punto de curva y expresar las derivadas de los vectores que la forman respecto a la referencia misma. Este método es conocido como "el método de las referencias móviles".

3.1 El triedro de Frenet

Sea $\mathcal{C}$ es una curva con representación paramétrica natural $\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3$ $s \mapsto \vec{\alpha}(s)$, y P un punto arbitrario de ella ($\overrightarrow{OP} = \vec{\alpha}(s)$). Es lógico empezar la construcción de las referencias invariantes en P tomando como primer vector el vector unitario de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en P, dado por $\vec{t} = \dot{\vec{\alpha}}(s)$.

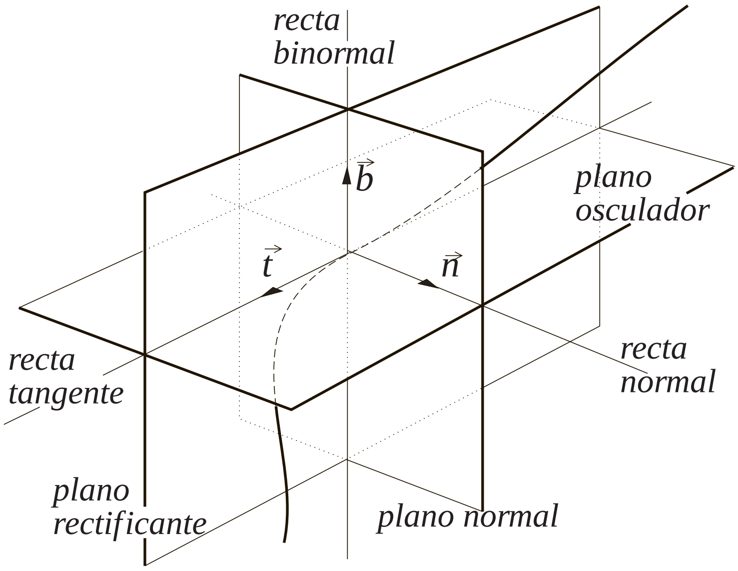
Para obtener los restantes elementos de la referencia invariante, supongamos que el punto P no es de inflexión (i.e. $\ddot{\vec{\alpha}} \neq \vec{0}$) y por consiguiente existe el plano osculador en P a la curva $\mathcal{C}$.

Definición 3.1 *La recta pasando por P perpendicular a la recta tangente y contenida en el plano osculador se denomina* recta normal principal *a la curva en P. El plano perpendicular a la tangente en P se llama* plano normal *a la curva en P. La*

recta perpendicular al plano osculador en P se llama recta binormal *a la curva en P. Y el plano determinado por la recta tangente y la recta binormal se llama* plano rectificante.

Es claro que todos estos elementos definidos son invariantes, y de los que surge la referencia invariante que buscamos.

En efecto, podemos elegir un vector unitario sobre la recta normal principal y otro sobre la recta binormal con una conveniente orientación. Por ejemplo podemos tomar, respectivamente



$$\vec{n} = \frac{\ddot{\vec{\alpha}}}{\|\ddot{\vec{\alpha}}\|}, \quad \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \frac{\dot{\vec{\alpha}} \times \ddot{\vec{\alpha}}}{\|\ddot{\vec{\alpha}}\|}.$$

Puesto que $\dot{\vec{\alpha}} \perp \ddot{\vec{\alpha}}$, como se comprueba al derivar $\dot{\vec{\alpha}} \cdot \dot{\vec{\alpha}} = 1$.

Definición 3.2 *Si P es un punto regular de una curva paramétrica $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2, tal que $\ddot{\vec{\alpha}} \neq \vec{0}$ en P, a la referencia con origen P y con vectores básicos $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ se llama referencia o* triedro de Frenet, *y a los vectores que la forman se les denomina respectivamente, vector* tangente, normal principal *y* binormal.

Tratamos de encontrar las fórmulas que expresan los vectores del triedro de Frenet para una parametrización arbitraria

Vector tangente:

$$\boxed{\vec{t} = \dot{\vec{\alpha}} = \frac{\vec{\alpha}\,'}{\|\ \vec{\alpha}\,'\ \|}}$$

Ya que $\vec{b}$ es un vector unitario con la misma dirección que $\dot{\vec{\alpha}} \times \ddot{\vec{\alpha}} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3\ \vec{\alpha}\,' \times \vec{\alpha}\,''$, tenemos que

$$\boxed{\vec{b} = \frac{\vec{\alpha}\,' \times \vec{\alpha}\,''}{\|\ \vec{\alpha}\,' \times \vec{\alpha}\,''\ \|}}$$

Utilizando estas relaciones, obtenemos (ver producto triple en el Apéndice, párrafo A.8):

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \frac{(\vec{\alpha}\,' \times \vec{\alpha}\,'') \times \vec{\alpha}\,'}{\|\vec{\alpha}\,' \times \vec{\alpha}\,''\|\ \|\vec{\alpha}\,'\|} = \frac{(\vec{\alpha}\,' \cdot \vec{\alpha}\,')\vec{\alpha}\,'' - (\vec{\alpha}\,'' \cdot \vec{\alpha}\,')\vec{\alpha}\,'}{\|\vec{\alpha}\,' \times \vec{\alpha}\,''\|\ \|\vec{\alpha}\,'\|}.$$

Luego el vector normal principal es:

$$\boxed{\vec{n} = \frac{\|\vec{\alpha}\,'\|^2\vec{\alpha}\,'' - (\vec{\alpha}\,' \cdot \vec{\alpha}\,'')\vec{\alpha}\,'}{\|\vec{\alpha}\,'\|\ \|\vec{\alpha}\,' \times \vec{\alpha}\,''\|}}$$

Nota 3.3 Si $\ddot{\vec{\alpha}} = \vec{0}$, o, más general, si $\{\vec{\alpha}\,', \vec{\alpha}\,''\}$ son dependientes las fórmulas anteriores no se pueden obtener y el triedro de Frenet no está definido. No obstante, esto sólo puede ocurrir en puntos aislados de la curva, a menos que un trozo de recta forme parte de la curva.

3.2 Fórmulas de Frenet

Consideremos ahora curvas de clase C^3 con puntos regulares en los cuales se tiene además que $\ddot{\vec{\alpha}} \neq \vec{0}$. Dada una tal curva vamos a estudiar el comportamiento de los vectores de la referencia o triedro de Frenet en P cuando el punto P se mueve a lo largo de la curva, originándose tres campos de vectores a lo largo de la curva. Para este fin, encontraremos las derivadas de estos campos de vectores con respecto al parámetro natural s.

La derivada de $\vec{t}$ es

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\dot{\vec{\alpha}}}{ds} = \ddot{\vec{\alpha}} = \|\ddot{\vec{\alpha}}\|\vec{n}.$$

Definición 3.4 *Introducimos la función* $\kappa : I \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto \kappa(s) = \|\ddot{\vec{\alpha}}\|$ *que llamamos* curvatura.

Podemos escribir entonces:

$$\boxed{\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa\vec{n}}$$

Con el fin de calcular las derivadas de las restantes vectores, expresémoslos como combinación de los vectores independientes $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$:

$$\begin{array}{rcccccc} d\vec{n}/ds & = & \xi\vec{t} & + & \eta\vec{n} & + & \zeta\vec{b} \\ d\vec{b}/ds & = & \lambda\vec{t} & + & \mu\vec{n} & + & \nu\vec{b} \end{array}$$

Multiplicando estas relaciones por $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ obtenemos:

$$\begin{array}{rclrclrcl} \xi & = & \vec{t}\cdot d\vec{n}/ds & \eta & = & \vec{n}\cdot d\vec{n}/ds & \zeta & = & \vec{b}\cdot d\vec{n}/ds \\ \lambda & = & \vec{t}\cdot d\vec{b}/ds & \mu & = & \vec{n}\cdot d\vec{b}/ds & \nu & = & \vec{b}\cdot d\vec{b}/ds \end{array}$$

Las identidades $\vec{t}^{\,2} = 1$, $\vec{n}^{\,2} = 1$, $\vec{b}^{\,2} = 1$, $\vec{t}\cdot\vec{n} = 0$, $\vec{t}\cdot\vec{b} = 0$, $\vec{n}\cdot\vec{b} = 0$, implican:

$$\vec{t}\cdot\frac{d\vec{t}}{ds} = 0 \qquad \vec{n}\cdot\frac{d\vec{n}}{ds} = 0 \qquad \vec{b}\cdot\frac{d\vec{b}}{ds} = 0$$

$$\vec{t}\cdot\frac{d\vec{n}}{ds} = -\vec{n}\cdot\frac{d\vec{t}}{ds} \qquad \vec{t}\cdot\frac{d\vec{b}}{ds} = -\vec{b}\cdot\frac{d\vec{t}}{ds} \qquad \vec{n}\cdot\frac{d\vec{b}}{ds} = -\vec{b}\cdot\frac{d\vec{n}}{ds}$$

de donde $\eta = \nu = 0$ y $\zeta = -\mu$.

Definición 3.5 *Denotamos por* $\tau : I \to I\!R, \quad s \mapsto \tau(s) = \zeta(s) = -\mu(s) = \vec{b}\cdot d\vec{n}/ds$ *la función denominada* torsión.

Se tiene además que

$$\xi = \vec{t}\cdot\frac{d\vec{n}}{ds} = -\vec{n}\cdot\frac{d\vec{t}}{ds} = -\vec{n}\cdot\kappa\vec{n} = -\kappa \qquad \lambda = \vec{t}\cdot\frac{d\vec{b}}{ds} = -\vec{b}\cdot\frac{d\vec{t}}{ds} = -\vec{b}\cdot\kappa\vec{n} = 0.$$

Consecuentemente, podemos enunciar el siguiente:

Teorema 3.6 *Las derivadas respecto al parámetro arco de los vectores de los triedros de Frenet satisfacen a las* fórmulas de Frenet *siguientes:*

$$\begin{array}{rclll} d\vec{t}/ds & = & & \kappa\vec{n} & \\ d\vec{n}/ds & = & -\kappa\vec{t} & & +\tau\vec{b} \\ d\vec{b}/ds & = & & -\tau\vec{n} & \end{array}$$

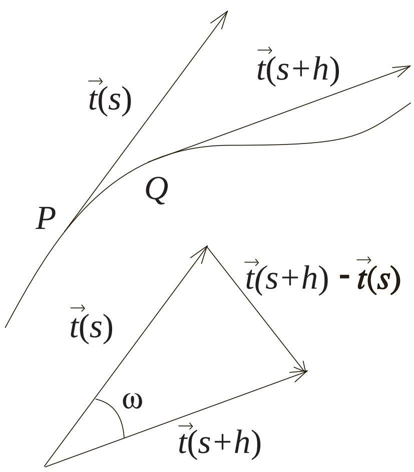
3.3 Curvatura de una curva

Consideremos un punto regular P de una curva $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3 \quad s \mapsto \vec{\alpha}(s)$ de clase C^2 correspondiente a un valor fijo del parámetro y un punto Q en un entorno de P que corresponde al valor $s+h$ del parámetro; así $|h|$ es la longitud del arco entre P y Q. Sea ω el ángulo entre los vectores tangente en P y Q a la curva. Con estas notaciones tenemos la siguiente interpretación geométrica de la curvatura:

Proposición 3.7 *La curvatura de la curva en* P *es límite de la razón* ω/h *cuando* $h \to 0 \quad$ *(o* $Q \to P$*).*

Demostración.- Sea ω el ángulo entre $\vec{t}(s)$ y $\vec{t}(s+h)$. Entonces $\|\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)\| = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\omega$, consecuentemente:

$$\frac{\omega}{|h|} = \frac{\omega}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\omega}\,\frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\omega}{|h|} = \frac{\frac{1}{2}\omega}{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\omega}\,\frac{\|\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)\|}{|h|}.$$



Y como

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}\omega}{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\omega} = 1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)\|}{|h|} = \|\dot{\vec{t}}(s)\| = \|\ddot{\vec{\alpha}}(s)\|$$

Resulta: $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\omega}{|h|} = 1\cdot\|\ddot{\vec{\alpha}}(s)\| = \kappa(s).$ □

Encontremos ahora las fórmulas que expresan la curvatura en término de coordenadas:

En el caso de la parametrización natural:

$$\kappa = \|\ddot{\vec{\alpha}}\| \quad o \quad \kappa = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

En caso de una parametrización arbitraria: Haciendo uso de la primera fórmula de Frenet, a saber $\kappa = \|\dot{\vec{t}}\|$, y de $\vec{t} = \vec{\alpha}\,'/\|\vec{\alpha}\,'\|$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\kappa &= \|\dot{\vec{t}}\| = \|\vec{t}\,'\|\|\vec{\alpha}\,'\|^{-1} = \|\vec{\alpha}\,'\|^{-1}\left\|\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\alpha}\,'}{\|\vec{\alpha}\,'\|}\right)\right\| = \\
&= \|\vec{\alpha}\,'\|^{-1}\left\|\frac{\|\vec{\alpha}\,'\|\vec{\alpha}\,'' - \frac{d}{dt}(\|\vec{\alpha}\,'\|)\vec{\alpha}\,'}{\|\vec{\alpha}\,'\|^2}\right\| = \\
&= \|\vec{\alpha}\,'\|^{-4}\|\vec{\alpha}\,'^2\vec{\alpha}\,'' - (\vec{\alpha}\,'\cdot\vec{\alpha}\,'')\vec{\alpha}\,'\| \;=\; \|\vec{\alpha}\,'\|^{-4}\|(\vec{\alpha}\,'\times\vec{\alpha}\,'')\times\vec{\alpha}\,'\|.
\end{aligned}$$

Para las últimas igualdades hemos usado la fórmula del producto vectorial triple (ver Apéndice, pág. 179).

Ya que $\vec{\alpha}\,'$ es obviamente perpendicular a $\vec{\alpha}\,'\times\vec{\alpha}\,''$, tenemos que

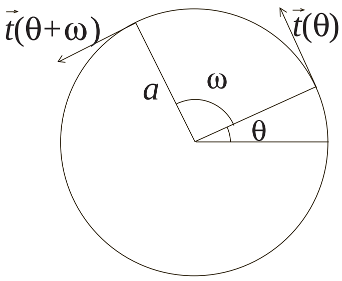
$$\|(\vec{\alpha}\,'\times\vec{\alpha}\,'')\times\vec{\alpha}\,'\| = \|\vec{\alpha}\,'\times\vec{\alpha}\,''\|\|\vec{\alpha}\,'\|$$

y, consecuentemente:

$$\boxed{\kappa = \frac{\|\ \vec{\alpha}\,'\times\vec{\alpha}\,''\ \|}{\|\ \vec{\alpha}\,'\ \|^3}}$$

O bien

$$\boxed{\kappa = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{\left(\ x'^{\,2} + y'^{\,2} + z'^{\,2}\ \right)^{3/2}}}$$



Ejemplo 3.8 Curvatura de la circunferencia de radio a:

$$\begin{aligned}
x &= a\cos\theta,\ y = a\,\mathrm{sen}\,\theta; \\
x' &= -a\,\mathrm{sen}\,\theta,\ y' = a\cos\theta; \\
x'' &= -a\cos\theta,\ y'' = -a\,\mathrm{sen}\,\theta.
\end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + a^2\cos^2\theta}{(a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + a^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a} \qquad \text{o bien} \qquad \kappa = \lim_{h\to 0}\frac{\omega}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\omega}{a\omega} = \frac{1}{a}.$$

3.4 Circunferencia osculatriz

Definición 3.9 *La circunferencia que tiene un contacto de mayor orden posible con una curva $\mathcal{C}$ en un punto P se llama* circunferencia osculatriz *de $\mathcal{C}$ en P.*

Definición 3.10 *Se denomina* centro de curvatura *y* radio de curvatura *de la curva $\mathcal{C}$ en P al centro y al radio de la circunferencia osculatriz en P.*

Proposición 3.11 *Una curva paramétrica de clase C^3 tiene una circunferencia osculatriz en todo punto regular y no de inflexión (i.e. $\kappa \neq 0$). La circunferencia osculatriz está situada en el plano osculador y tiene un contacto de orden dos por lo menos con la curva. Su radio es igual al inverso de la curvatura en el punto de contacto. Su centro está situado sobre la normal principal en el sentido del vector normal principal.*

Demostración.- Sea $\mathcal{C}$ una curva de clase C^3 y una circunferencia $\mathcal{C}^*$ con representaciones paramétricas naturales

$$\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3 \qquad \overrightarrow{\alpha^*} : J \to I\!R^3$$

respectivamente, que tiene un punto P común.

Si tienen un contacto de orden uno: $\dot{\vec{\alpha}} = \overrightarrow{\dot{\alpha}^*}$. Luego, las circunferencias de contacto uno con la curva en P son todas las que tienen la misma tangente que $\mathcal{C}$.

De estas circunferencias determinemos las que tienen un contacto de orden dos, al menos:

$$\dot{\vec{\alpha}} = \overrightarrow{\dot{\alpha}^*} \quad \text{y} \quad \ddot{\vec{\alpha}} = \overrightarrow{\ddot{\alpha}^*} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \overrightarrow{n^*} = \frac{\ddot{\vec{\alpha}}}{\|\ddot{\vec{\alpha}}\|} = \frac{\overrightarrow{\ddot{\alpha}^*}}{\|\overrightarrow{\ddot{\alpha}^*}\|}.$$

Por consiguiente, la curva y la circunferencia tienen la misma normal unitaria y la misma curvatura.

Con lo que queda perfectamente determinada la circunferencia que tiene al menos un contacto de orden dos con la curva, ésta está situada en el plano paralelo a los vectores $\dot{\vec{\alpha}}$ y $\ddot{\vec{\alpha}}$ y que pasa por P (plano osculador). Su centro está en la recta normal y su radio es $a = 1/\kappa$ (ver Ejemplo 3.8).

□

Así el centro de curvatura de la curva $\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3$ en un punto s_0 tiene como vector posición

$$\vec{\beta} = \vec{\alpha}(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\vec{n}(s_0)$$

y el radio de curvatura es $\rho = 1/\kappa$.

Definición 3.12 *La recta que pasa por el centro de curvatura de una curva $\mathcal{C}$ en P perpendicular al plano osculador de $\mathcal{C}$ en P se llama* recta polar *de la curva en P.*

La ecuación de la recta polar correspondiente al punto $\overrightarrow{OP} = \vec{\alpha}(s)$ es:

$$\vec{\beta}(u) = \vec{\alpha}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\vec{n}(s) + u\,\vec{b}(s).$$

3.5 Torsión de una curva

Similarmente a la función curvatura se tiene la siguiente interpretación geométrica de la torsión de una curva, de la que sólo damos el enunciado [8, pag. 59].

Proposición 3.13 *La torsión de una curva regular $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3$ de clase C^3 existe en todo punto regular en el que $\ddot{\vec{\alpha}} \neq \vec{0}$ y viene dada por el*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\theta}{h} = \tau,$$

siendo θ el ángulo que forma las binormales $\vec{b}(s+h)$ y $\vec{b}(s)$. □

Vamos a obtener ahora algunas fórmulas para la torsión. Multiplicando la última fórmula de Frenet por $\vec{n}$ obtenemos:

$$\tau = -\dot{\vec{b}} \cdot \vec{n} = -\frac{d}{ds}(\vec{t} \times \vec{n}) \cdot \vec{n} = -(\dot{\vec{t}} \times \vec{n}) \cdot \vec{n} - (\vec{t} \times \dot{\vec{n}}) \cdot \vec{n} = [\vec{t}\,\vec{n}\,\dot{\vec{n}}].$$

Además

$$\vec{t} = \dot{\vec{\alpha}}, \qquad \vec{n} = \frac{\ddot{\vec{\alpha}}}{\|\ddot{\vec{\alpha}}\|} = \frac{\ddot{\vec{\alpha}}}{\kappa}, \qquad \dot{\vec{n}} = \frac{\dddot{\vec{\alpha}}}{\kappa} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}\ddot{\vec{\alpha}}.$$

Con lo que

$$\tau = \left[\vec{t}\,\vec{n}\,\dot{\vec{n}}\right] = \left[\dot{\vec{\alpha}}\ \frac{\ddot{\vec{\alpha}}}{\kappa}\ \left(\frac{\dddot{\vec{\alpha}}}{\kappa} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}\ddot{\vec{\alpha}}\right)\right] = \frac{[\dot{\vec{\alpha}}\,\ddot{\vec{\alpha}}\,\dddot{\vec{\alpha}}]}{\kappa^2}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\left[\ \dot{\vec{\alpha}}\ \ddot{\vec{\alpha}}\ \dddot{\vec{\alpha}}\ \right]}{\|\ \ddot{\vec{\alpha}}\ \|^2}}$$

En coordenadas, la expresión de la torsión es:

$$\boxed{\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}$$

Pasamos ahora a calcular la torsión cuando el parámetro no es el natural

$$\dot{\vec{\alpha}} = \vec{\alpha}\,'\frac{dt}{ds}, \qquad \ddot{\vec{\alpha}} = \vec{\alpha}\,''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \vec{\alpha}\,'\frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\dddot{\vec{\alpha}} = \vec{\alpha}\,'''\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\vec{\alpha}\,''\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2} + \vec{\alpha}\,'\frac{d^3t}{ds^3},$$

de donde
$$[\vec{\dot\alpha}\,\vec{\ddot\alpha}\,\overrightarrow{\dddot\alpha}] = [\vec\alpha\,'\,\vec\alpha\,''\,\vec\alpha\,'''] \left(\frac{dt}{ds}\right)^6 = [\vec\alpha\,'\,\vec\alpha\,''\,\vec\alpha\,''']\,\|\vec\alpha\,'\|^{-6}.$$

Por lo que

$$\tau = \frac{[\vec\alpha\,'\,\vec\alpha\,''\,\vec\alpha\,''']\,\|\vec\alpha\,'\|^{-6}}{\kappa^2} = \frac{[\vec\alpha\,'\,\vec\alpha\,''\,\vec\alpha\,''']\,\|\vec\alpha\,'\|^{6}}{\|\vec\alpha\,'\times\vec\alpha\,''\|^2\,\|\vec\alpha\,'\|^6} = \frac{[\vec\alpha\,'\,\vec\alpha\,''\,\vec\alpha\,''']}{(\vec\alpha\,'\times\vec\alpha\,'')^2}$$

$$\boxed{\tau = \frac{[\ \vec\alpha\,'\,\vec\alpha\,''\,\vec\alpha\,'''\ ]}{(\vec\alpha\,')^2(\vec\alpha\,'')^2-(\vec\alpha\,'\cdot\vec\alpha\,'')^2}}$$

donde hemos usado la identidad de Lagrange (pág. 179).

La expresión de la torsión en coordenadas cuando el parámetro de la curva es arbitrario es:

$$\boxed{\tau = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}$$

3.6 Posición de una curva con respecto a sus triedros de Frenet

Con objeto de determinar la posición relativa de una curva con respecto al triedro de Frenet en un punto regular en el que $\vec{\ddot\alpha}(s) \neq \vec 0$, estudiaremos las proyecciones de la curva sobre los planos del triedro. Sea nuestro punto correspondiente al valor $s = 0$ del parámetro natural. La ecuación paramétrica de la curva puede ser escrita en la forma:

$$\vec\alpha(s) = \vec\alpha_0 + \overrightarrow{\dot\alpha_0}s + \frac12\overrightarrow{\ddot\alpha_0}s^2 + \frac16\overrightarrow{\dddot\alpha}_0 s^3 + \vec\varepsilon \qquad \vec\varepsilon = o(s^3).$$

Por las fórmulas de Frenet

$$\vec{\dot\alpha}_0 = \vec t_0, \qquad \vec{\ddot\alpha}_0 = \kappa_0\vec n_0, \qquad \overrightarrow{\dddot\alpha}_0 = -\kappa_0^2\vec t_0 + \dot\kappa_0\vec n_0 + \kappa_0\tau_0\vec b_0.$$

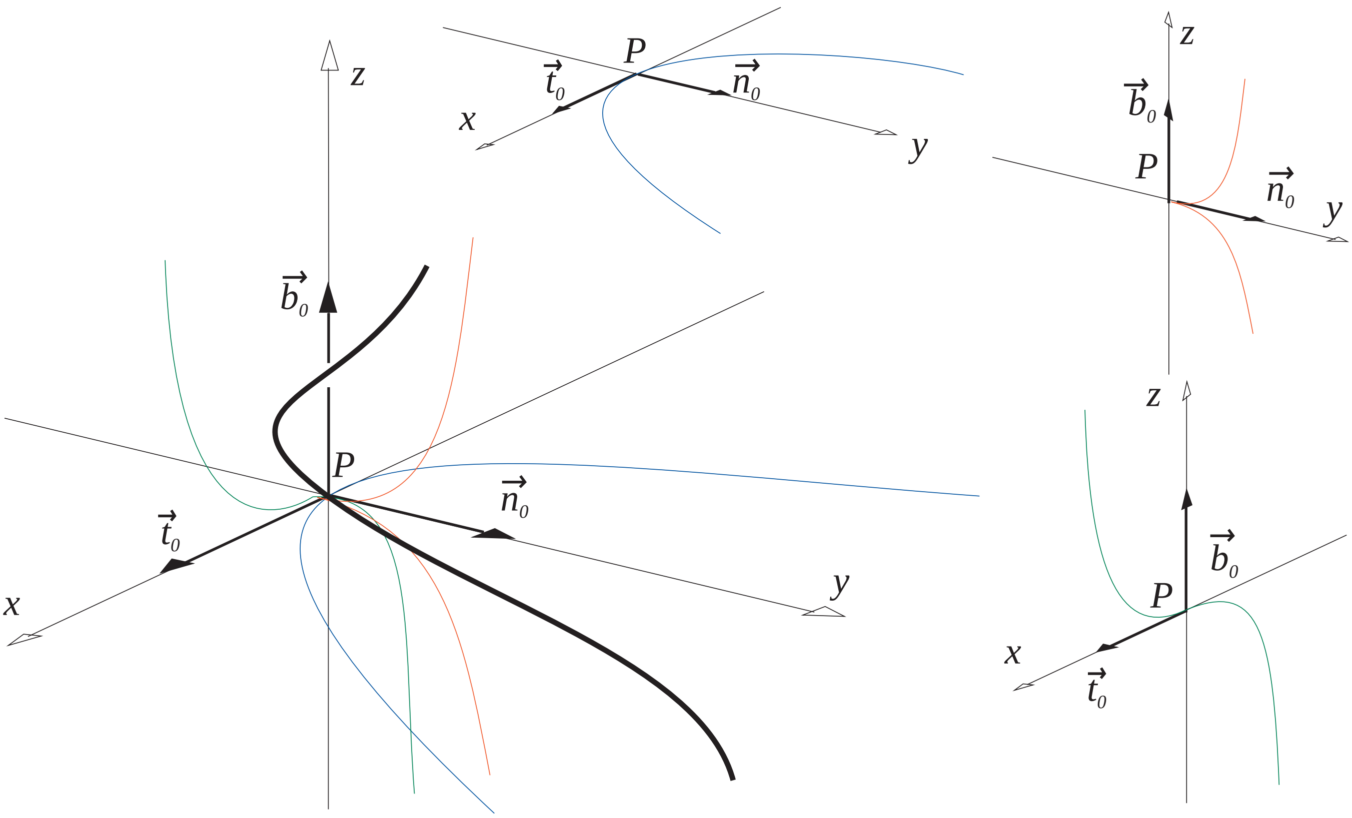
Sustituyendo en la fórmula anterior

$$\vec\alpha(s) = \vec\alpha_0 + (s - \frac16\kappa_0^2 s^3)\vec t_0 + (\frac12\kappa_0 s^2 + \frac16\dot\kappa_0 s^3)\vec n_0 + \frac16\kappa_0\tau_0 s^3\vec b_0 + \vec\varepsilon.$$

Escojamos ahora un sistema de coordenadas especiales en el espacio tal que el punto considerado arriba es el origen y los vectores $\vec{t}_0$, $\vec{n}_0$, $\vec{b}_0$ son los vectores unitarios de los ejes coordenados. En este sistema de coordenadas la curva puede ser representadas por las ecuaciones:

$$x = s + o(s), \quad y = \frac{1}{2}\kappa_0 s^2 + o(s^2), \quad z = \frac{1}{6}\kappa_0\tau_0 s^3 + o(s^3).$$

Despreciando en esta ecuación los términos de orden inferior, podemos expresar las proyecciones aproximadas de la curva en un entorno de P sobre los planos del triedro de Frenet en el punto:



- La proyección sobre el plano osculador es la parábola:

$$x = s, \qquad y = \tfrac{1}{2}\kappa_0 s^2, \qquad z = 0.$$

- La proyección sobre el plano normal es la parábola semicúbica con un punto de retroceso en el origen:

$$x = 0, \qquad y = \tfrac{1}{2}\kappa_0 s^2, \qquad z = \tfrac{1}{6}\kappa_0\tau_0 s^3.$$

- La proyección sobre el plano rectificante es la parábola cúbica:

$$x = s, \qquad y = 0, \qquad z = \tfrac{1}{6}\kappa_0\tau_0 s^3.$$

Ejemplos

Ejemplo 3.14 (Ver también el Ejemplo 4.12) *Calculemos la curvatura y la torsión*

en el punto $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$ *de la curva intersección de la esfera y cilindro siguientes:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad x^2 + y^2 - x = 0$$

Tomando x como parámetro, dicha curva tendrá por ecuación, en un entorno del punto $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$, $\vec{\alpha}(x) = (x, y(x), z(x))$. Derivando resultan las ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} x + yy' + zz' = 0 & 1 + y'^2 + yy'' + z'^2 + zz'' = 0 \\ 2x + 2yy' - 1 = 0 & 2 + 2y'^2 + 2yy'' = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2y'y'' + y'y'' + yy''' + 2z'z'' + z'z'' + z'z'' + 2z''' = 0 \\ 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 0 \end{array}$$

Que particularizadas en el punto $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$ resulta:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' = -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}y'' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'' = -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}y''' + 2z''' = -\frac{3}{2} \\ y' = 0 & y'' = -2 & y''' = 0 \end{array}$$

Sistemas que tienen por soluciones, respectivamente:

$$\vec{\alpha}' = (1, 0, -\sqrt{2}/2), \quad \vec{\alpha}'' = (0, -2, -\sqrt{2}/2), \quad \vec{\alpha}''' = (0, 0, -3/4).$$

$$\kappa = \frac{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|}{\|\vec{\alpha}'\|^3} = \frac{\|(-\sqrt{2}, \sqrt{2}/2, -2)\|}{\sqrt{3/2}^3} = \frac{\sqrt{13/2}}{\sqrt{3/2}^3} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{13}{3}}$$

$$\tau = \frac{[\vec{\alpha}'\, \vec{\alpha}''\, \vec{\alpha}''']}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|^2} = \frac{3/2}{13/2} = \frac{3}{13}.$$

Ejemplo 3.15 *Si una curva* $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ *tiene torsión* τ *constante, la curva*

$$\vec{\beta}(s) = -\frac{1}{\tau}\vec{n}(s) + \int \vec{b}(s)ds$$

tiene curvatura constante igual a $\pm\tau$.

Calculamos $\overrightarrow{\beta'}$ y $\overrightarrow{\beta''}$, para determinar la curvatura κ^* de $\vec{\beta}$:

$$\overrightarrow{\beta'} = -\frac{1}{\tau}(-\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}) + \vec{b} = \frac{\kappa}{\tau}\vec{t}, \qquad \overrightarrow{\beta''} = \frac{\dot{\kappa}}{\tau}\vec{t} + \frac{\kappa^2}{\tau}\vec{n}.$$

$$\kappa^* = \frac{\|\overrightarrow{\beta'} \times \overrightarrow{\beta''}\|}{\|\overrightarrow{\beta'}\|^3} = \frac{\left\|\frac{\kappa^3}{\tau^2}\vec{b}\right\|}{\left\|\frac{\kappa}{\tau}\vec{t}\right\|^3} = |\tau| = \pm\tau.$$

TEMA IV

Ecuación natural de una curva

Las funciones curvatura y torsión caracterizan totalmente (al menos localmente) a una curva, en el sentido que dadas dos funciones κ y τ, existe bajo ciertas condiciones una única curva, salvo su posición en el espacio, que tiene como curvatura y torsión, respectivamente, a las funciones dadas.

4.1 Teorema fundamental de la teoría de curvas

Teorema 4.1 *Dadas dos funciones continuas*

$$\kappa = \kappa(s) > 0, \qquad \tau = \tau(s), \tag{4.1}$$

definidas en un intervalo (a,b), finito o infinito, existe una curva paramétrica para la cual s es el parámetro natural y las funciones dadas κ y τ son, respectivamente, la curvatura y torsión de la curva. Dos curvas con la misma curvatura y torsión se pueden superponer mediante un movimiento rígido. A las ecuaciones (4.1) se les conoce como ecuaciones naturales o intrínsecas *de la curva.*

Demostración.- Si una curva con estas propiedades existe, su ecuación vectorial

$$\overrightarrow{\alpha} : (a,b) \to I\!R^3 \qquad s \mapsto \vec{\alpha}(s),$$

satisface al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left.\begin{array}{rcl} d\vec{\alpha}/ds & = & \vec{t} \\ d\vec{t}/ds & = & \kappa\vec{n} \\ d\vec{n}/ds & = & -\kappa\vec{t}+\tau\vec{b} \\ d\vec{b}/ds & = & -\tau\vec{n} \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

con las siguientes condiciones adicionales

$$\vec{t}^{\,2}=\vec{n}^{\,2}=\vec{b}^{\,2}=1, \qquad \vec{t}\cdot\vec{n}=\vec{n}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{t}=\vec{0}, \tag{4.3}$$

que expresan que los vectores $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$, forman una base ortonormal.

La demostración de nuestro teorema puede ser así reducida a la demostración de existencia y unicidad de solución del sistema (4.2) con las condiciones iniciales (4.3). El valor inicial será la posición del punto para el valor s_0 del parámetro y las posiciones de los vectores del triedro de Frenet para el valor s_0.

Sean las componentes de los vectores en cuestión, relativas a un sistema de coordenadas fijo en el espacio:

$$\vec{t}=(t^1,t^2,t^3), \quad \vec{n}=(n^1,n^2,n^3), \quad \vec{b}=(b^1,b^2,b^3), \quad \vec{\alpha}=(x,y,z).$$

El sistema (4.2) es entonces equivalente a un sistema formado por las ecuaciones:

$$\frac{dx}{ds}=t^1, \qquad \frac{dy}{ds}=t^2, \qquad \frac{dz}{ds}=t^3, \tag{4.4}$$

y las nueve ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} dt^i/ds & = & \kappa n^i \\ dn^i/ds & = & -\kappa t^i+\tau b^i \qquad (i=1,2,3) \\ db^i/ds & = & -\tau n^i \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

y las condiciones (4.3) equivalen a que sea ortogonal la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} t^1 & t^2 & t^3 \\ n^1 & n^2 & n^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

El sistema (4.5) es un sistema con nueve ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con nueve incógnitas (continuas). El teorema de existencia y unicidad de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, implica que este sistema tiene una solución que está únicamente determinada por los valores iniciales:

$$(t_0^1,t_0^2,t_0^3), \quad (n_0^1,n_0^2,n_0^3), \quad (b_0^1,b_0^2,b_0^3).$$

Probemos ahora que si la matriz de valores iniciales es una matriz ortogonal entonces la matriz formada por las soluciones encontradas es también ortogonal. Ya

que el determinante de esta matriz es una función continua y sus valores pueden ser 1 o -1 solamente, este determinante será constante. Consecuentemente los vectores $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ forman una terna orientada positiva, determinada por el valor inicial.

Consideremos las funciones

$$s \mapsto t^i t^j + n^i n^j + b^i b^j, \qquad (i,j = 1,2,3)$$

donde t^k, n^k, b^k son soluciones del sistema (4.5). La derivada de cada una de estas funciones es igual a:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(t^i t^j + n^i n^j + b^i b^j) &= \frac{dt^i}{ds}t^j + t^i\frac{dt^j}{ds} + \frac{dn^i}{ds}n^j + n^i\frac{dn^j}{ds} + \frac{db^i}{ds}b^j + b^i\frac{db^j}{ds} = \\ &= \kappa n^i t^j + \kappa t^i n^j - \kappa t^i n^j + \tau b^i n^j - \kappa n^i t^j + \tau n^i b^j - \tau n^i b^j - \tau b^i n^j = 0.\end{aligned}$$

lo que implica que

$$t^i t^j + n^i n^j + b^i b^j = cte.$$

Pero la matriz (4.6) es ortogonal (${}^t AA = I$) si y sólo si

$$t^i t^j + n^i n^j + b^i b^j = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

Consecuentemente, si la matriz es ortogonal para un valor de s, es ortogonal para todos los valores.

Usando la solución de (4.5) que está determinada por los valores iniciales de $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$, podemos encontrar la solución de (4.4), que está unívocamente determinada por los valores (x_0, y_0, z_0) de las funciones x, y, z.

Así, vemos que, dado el punto inicial y los valores iniciales de los tres vectores del triedro de Frenet, podemos encontrar una única curva que tiene las funciones curvatura y torsión dadas y el triedro de Frenet dado en el punto inicial.

Ya que dos triedros de Frenet pueden ser superpuestos por un movimiento rígido, lo mismo ocurre para las soluciones encontradas, lo que prueba la segunda parte del teorema. □

Definición 4.2 *Las ecuaciones $\kappa = \kappa(s)$ y $\tau = \tau(s)$ que establecen la dependencia de la curvatura y la torsión de la longitud de arco y determinan la curva salvo su posición en el espacio se denominan* ecuaciones naturales *de la curva.*

Solución general de las ecuaciones intrínsecas de una curva

La ecuación natural de una curva plana ($\tau = 0$) puede resolverse (es decir, se puede hallar las coordenadas cartesianas) mediante dos cuadraturas. En efecto, si damos una ecuación de la forma $\kappa = \kappa(s)$, mediante las relaciones

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} \qquad \cos\,\varphi = \frac{dx}{ds} \qquad \text{sen}\,\varphi = \frac{dy}{ds},$$

vemos que x e y pueden determinarse por dos cuadraturas:

$$x = \int_{s_0}^{s} \cos\varphi(s)\,ds \qquad y = \int_{s_0}^{s} \operatorname{sen}\varphi(s)\,ds \qquad \varphi = \int_{s_0}^{s} \kappa(s)\,ds$$

O bien

$$x = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{\kappa}\cos\varphi\,d\varphi \qquad y = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{\kappa}\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi \qquad \varphi = \int_{s_0}^{s} \kappa(s)\,ds$$

En el caso de curvas alabeadas ($\tau \neq 0$) cabe intentar la resolución de la ecuación diferencial de tercer orden en $\vec{t}(s)$ que se obtiene a partir de las ecuaciones (4.2) por eliminación de $\vec{n}(s)$ y $\vec{b}(s)$; o sea la ecuación [6, pag. 33]:

$$\frac{d^3\vec{t}}{ds^3} - \frac{d}{ds}(\ln\tau\kappa^2)\frac{d^2\vec{t}}{ds^2} + \left[\kappa\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{\kappa}\right) + \frac{1}{\kappa\tau}\frac{d\kappa}{ds}\frac{d\tau}{ds} + \kappa^2 + \tau^2\right]\frac{d\vec{t}}{ds} + \kappa\tau\frac{d}{ds}(\frac{\kappa}{\tau})\vec{t} = 0.$$

A partir de la cual $\vec{n}$ y $\vec{b}$, se obtienen de

$$\vec{n} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\vec{t}}{ds}, \qquad \vec{b} = \frac{1}{\kappa\tau}\left(\frac{d^2\vec{t}}{ds^2} - \frac{1}{\kappa}\frac{d\kappa}{ds}\frac{d\vec{t}}{ds} + \kappa^2\vec{t}\right).$$

Sin embargo, es posible reducir el problema a la resolución de una ecuación de primer orden (ecuación de Riccati, ver pág. 50); este tipo de ecuaciones está bien estudiado, su integración no puede reducirse a cuadraturas, su resoluución debe pasar necesariamente por encontrar una integral particular, con lo cual se puede reducir a una ecuación de Bernoulli ($n = 2$), y finalmente a una ecuación lineal; encontrada la solución de ésta y haciendo las transformaciones inversas se llega a la solución general de la ecuación de Riccati.

Dicha ecuación de Riccati es [7, Pag. 27] [21, Pag. 43]:

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{i\tau}{2}\omega^2 - i\kappa\omega - \frac{i\tau}{2}.$$

Cuya solución se expresa de la forma

$$\omega = \frac{cf_1 + f_2}{cf_3 + f_4},$$

siendo f_1, f_2, f_3, f_4 funciones de s.

Entonces la curva tiene por ecuaciones:

$$x = \int_{s_0}^{s} t^1\,ds \qquad y = \int_{s_0}^{s} t^2\,ds \qquad z = \int_{s_0}^{s} t^3\,ds$$

siendo

$$t^1 = \frac{(f_1^2 - f_3^2) - (f_2^2 - f_4^2)}{2(f_1f_4 - f_2f_3)} \qquad t^2 = i\frac{(f_1^2 - f_3^2) + (f_2^2 - f_4^2)}{2(f_1f_4 - f_2f_3)} \qquad t^3 = \frac{f_3f_4 - f_1f_2}{f_1f_4 - f_2f_3}$$

Ejemplo 4.3 Ecuación intrínseca o natural de la circunferencia: $\kappa = 1/a,\ \tau = 0.$

A) Como curva plana:

$$x = \int a\ \cos\,\varphi\, d\varphi \qquad y = \int a\ \text{sen}\ \varphi\, d\varphi \qquad \varphi = \int 1/a\, ds$$

Condiciones iniciales: $\varphi_0 = \pi/2 \quad (x_0, y_0) = (a, 0)$

$$x = a\ \text{sen}\ \varphi \qquad y = -a\ \cos\ \varphi \qquad \varphi = s/a + \pi/2$$

$$x = a\ \cos\,(s/a) \qquad y = a\ \text{sen}\,(s/a).$$

O bien

$$x = \int \cos\ \varphi(s) ds \qquad y = \int \text{sen}\ \varphi(s) ds \qquad \varphi = \int 1/a\, ds$$

$$x = \int \cos(s/a + \pi/2) ds \qquad y = \int \text{sen}(s/a + \pi/2) ds \qquad \varphi = s/a + \pi/2$$

$$x = a\ \text{sen}(s/a + \pi/2) + c_1 \qquad y = -a\ \cos(s/a + \pi/2) + c_2$$

$$x = a\ \cos(s/a) \qquad y = a\ \text{sen}(s/a).$$

B) Por el método de la ecuación de Riccati:

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{i\tau}{2}\omega^2 - i\kappa\omega - \frac{i\tau}{2}$$

$$\frac{d\omega}{ds} = -i\kappa\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = ce^{-\frac{is}{a}}$$

Por lo que:

$$f_1 = e^{-\frac{is}{a}}, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = 1$$

$$x = \int \frac{e^{-i(2s/a)} + 1}{2e^{-i(s/a)}} ds \qquad y = i \int \frac{e^{-i(2s/a)} - 1}{2e^{-i(s/a)}} ds$$

$$x = \frac{1}{2} \int (e^{-i(s/a)} + e^{i(s/a)}) ds \qquad y = i\frac{1}{2} \int (e^{-i(s/a)} - e^{i(s/a)}) ds$$

$$x = \frac{1}{2} \int (\cos \frac{-s}{a} + i \,\text{sen}\, \frac{-s}{a} + \cos \frac{s}{a} + i \,\text{sen}\, \frac{s}{a}) ds = \frac{1}{2} \int 2 \cos \frac{s}{a} ds = a \,\text{sen}\, \frac{s}{a}$$

$$y = \frac{i}{2} \int (\cos \frac{-s}{a} + i \,\text{sen}\, \frac{-s}{a} + - \cos \frac{s}{a} - i \,\text{sen}\, \frac{s}{a}) ds = \frac{1}{2} \int 2 \,\text{sen}\, \frac{s}{a} ds = -a \cos \frac{s}{a}$$

$$x = a \,\text{sen}\, \frac{s}{a} \qquad y = -a \cos \frac{s}{a}$$

Haciendo el cambio de parámetro $s* = s - a(\pi/2)$, resulta:

$$x = a \cos \frac{s*}{a} \qquad y = a \,\text{sen}\, \frac{s*}{a}.$$

4.2 Hélice general

Definición 4.4 *Una* hélice *es una curva que forma (su vector tangente) un ángulo constante con una dirección fija en el espacio.*

Proposición 4.5 (de caracterización) *Una curva paramétrica de clase C^3, con $\kappa \neq 0$, es una hélice general si y sólo si $\tau/\kappa = cte$; además, $\tau/\kappa = cotag\ \theta_0$, donde θ_0 es el ángulo constante entre la curva y la dirección fija en el espacio.*

Demostración.- Sea $\vec{u}$ un vector unitario que determina la dirección constante. Entonces tenemos:

$$\vec{t} \cdot \vec{u} = \cos\ \theta = cte.$$

Consecuentemente $\vec{u} \cdot \dot{\vec{t}} = 0$ y $\kappa \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. Como por hipótesis $\kappa \neq 0$, se sigue que

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0,$$

con lo que el vector $\vec{u}$ queda en el plano rectificante.

Diferenciando esta ecuación, se obtiene:

$$\vec{u} \cdot \dot{\vec{n}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\kappa \vec{u} \cdot \vec{t} + \tau \vec{u} \cdot \vec{b} = 0.$$

Ya que $\vec{u}$ es un vector unitario en el plano rectificante y $\vec{u} \cdot \vec{t} = \cos\ \theta$, tenemos que ($\vec{u} \cdot \vec{b} = \text{sen}\ \theta$ *o* $\vec{u} \cdot \vec{b} = -\text{sen}\ \theta$). Podemos excluir el último caso sin pérdida de generalidad, simplemente reemplazando el vector $\vec{u}$ por el vector $-\vec{u}$, que determina la misma dirección en el espacio. Consecuentemente tenemos la ecuación natural o intrínseca de una hélice:

$$-\kappa\ \cos\ \theta + \tau\ \text{sen}\ \theta = 0$$

$$\frac{\tau}{\kappa} = cotag\ \theta = cte.$$

Recíprocamente, si se satisface la relación $\tau/\kappa = cte$, entonces el vector $\vec{a} = (\tau/\kappa)\vec{t} + \vec{b}$ es constante, ya que

$$\frac{d\vec{a}}{ds} = \frac{\tau}{\kappa}\dot{\vec{t}} - \tau\vec{n} = \frac{\tau}{\kappa}\kappa\vec{n} - \tau\vec{n} = 0.$$

Por otra parte, el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{t}$ es constante, ya que

$$cotag\ \theta = \frac{\frac{\tau}{\kappa}}{1} = \frac{\tau}{\kappa} = cte.$$

4.3 Esfera osculatriz

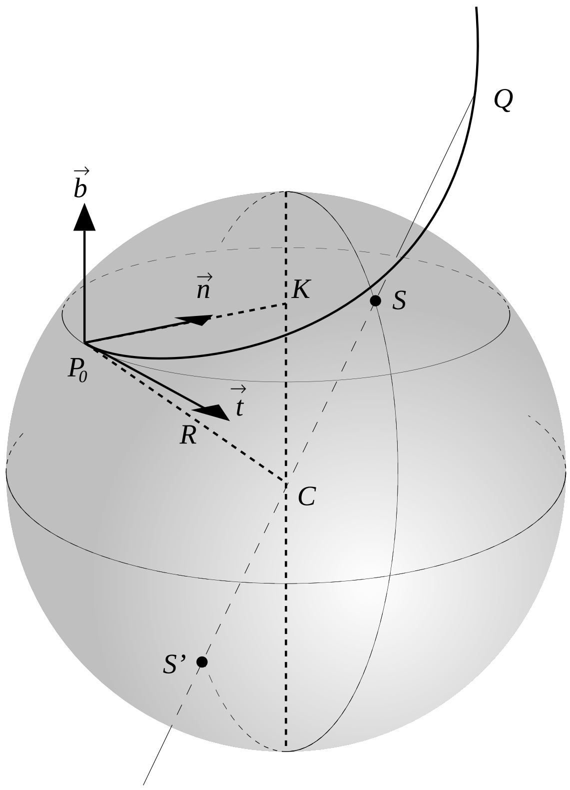
Definición 4.6 *Una esfera tiene un* contacto de orden p *al menos con una curva en un punto común* P *si* $d_h = o(h^p)$, *siendo* d_h *la distancia de un punto de la curva de abscisa curvilínea* h *a la esfera.*

Definición 4.7 *Una esfera que tiene un contacto superior a dos con una curva en un punto* P_0 *se llama* esfera osculatriz *de la curva en* P_0.

Proposición 4.8 *Una curva de clase* C^4 *tiene una y sólo una esfera osculatriz en todo punto regular en el que* $\kappa \neq 0$, $\tau \neq 0$. *El centro* C *de la esfera osculatriz está situado en la recta polar (Definición 3.12) y si* K *es el centro de curvatura, se tiene*

$$\overrightarrow{KC} = -\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\vec{b}.$$

El radio de la esfera osculatriz es igual a $R = \sqrt{\dfrac{1}{\kappa^2} + \dfrac{\dot{\kappa}^2}{\kappa^4\tau^2}}$.
La esfera osculatriz tiene un contacto de orden 3 *al menos con la curva.*



Demostración.- Sea C el centro de una esfera pasando por el punto P_0, y sea Q un punto variable en la curva.

Denotemos por S y S' los puntos en que la recta que pasa por C y Q interseca a la esfera. En orden a estimar el orden de contacto de la esfera y la curva en el punto P_0, hemos de estimar la distancia $d = \overline{QS}$ del punto Q a la superficie de la esfera. En su lugar podemos estimar la cantidad $\delta = \overline{QS}\,\overline{QS'}$.

En efecto, cuando $Q \to P_0$ tenemos que $\overline{QS} \to 0$ y $\overline{QS'} \to 2R$, donde R es el radio de la esfera. Por tanto:

$$\left|\frac{\delta}{d}\right| \to 2R \Leftrightarrow \delta = O(d) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ δ y d son del mismo orden infinitesimal.

Ahora sea $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3 \quad s \mapsto \vec{\alpha}(s)$ una representación paramétrica regular de la curva, y el punto P_0 correspondiente al valor $s = 0$; $\vec{\alpha}_0$, $\vec{t}_0$, $\vec{n}_0$, $\vec{b}_0$, τ_0, κ_0 los valores de las correspondientes funciones en el punto $s = 0$, por $\vec{a} = \overrightarrow{OC}$ el vector posición del centro de la esfera y por R el radio de la esfera. Entonces tenemos:

$$\delta = \overline{QS}\,\overline{QS'} = (\overline{QC} - \overline{CS})(\overline{QC} + \overline{CS'}) =$$

$$= (\overline{QC} - R)(\overline{QC} + R) = \overline{QC}^2 - R^2 = (\vec{\alpha}(s) - \vec{a})^2 - R^2$$

La fórmula de Taylor en $s = 0$ da:

$$\begin{aligned}\delta &= (\vec{\alpha}_0 - \vec{a})^2 - R^2 + 2s(\vec{\alpha}_0 - \vec{a})\vec{t}_0 + s^2(1 + (\vec{\alpha}_0 - \vec{a})\kappa_0\vec{n}_0) + \\ &+\frac{2}{3!}s^3(\vec{\alpha}_0 - \vec{a})(-\kappa_0^2\vec{t}_0 + \dot{\kappa}_0\vec{n}_0 + \kappa_0\tau_0\vec{b}_0) + o(s^3).\end{aligned}$$

Ya que el punto P_0 está en la esfera, tenemos:

$$(\vec{\alpha}_0 - \vec{a})^2 - R^2 = 0.$$

El requerimiento de que el contacto fuera de orden 3 por lo menos lleva consigo las condiciones:

$$(\vec{\alpha}_0 - \vec{a})\vec{t}_0 = 0, \tag{4.7}$$

que significa que la curva es tangente a la esfera;

$$1 + (\vec{\alpha}_0 - \vec{a})\kappa_0\vec{n}_0 = 0 \Leftrightarrow (\vec{\alpha}_0 - \vec{a})\vec{n}_0 = -\frac{1}{\kappa_0}, \tag{4.8}$$

que significa que la proyección del centro sobre el plano osculador coincide con el centro de curvatura K, en otras palabras, que el centro está en la recta polar; y finalmente

$$(\vec{\alpha}_0 - \vec{a})(-\kappa_0^2\vec{t}_0 + \dot{\kappa}_0\vec{n}_0 + \kappa_0\tau_0\vec{b}_0) = 0$$

que, usando (4.7) y (4.8), queda

$$-\frac{\dot{\kappa}_0}{\kappa_0} + \kappa_0\tau_0(\vec{\alpha}_0 - \vec{a})\vec{b}_0 = 0 \tag{4.9}$$

Las ecuaciones (4.7), (4.8) y (4.9) determinan completamente el vector posición del centro. En efecto, sea

$$\vec{a} - \vec{\alpha}_0 = \lambda\vec{t}_0 + \mu\vec{n}_0 + \nu\vec{b}_0.$$

Multiplicando escalarmente por $\vec{t}_0$ se obtiene, por (4.7), que $\lambda = 0$.

Multiplicando escalarmente por $\vec{n}_0$, obtenemos, debido a (4.8), que $\mu = \dfrac{1}{\kappa_0}$.

Y finalmente, multiplicando por $\vec{b}_0$ y usando (4.9), se sigue que

$$\frac{\dot{\kappa}}{\kappa_0} + \kappa_0\tau_0\nu = 0, \qquad \text{de donde} \qquad \nu = -\frac{\dot{\kappa}_0}{\kappa_0^2\tau_0}.$$

Consecuentemente, el <u>centro de la esfera osculatriz</u> en P_0, viene dado por

$$\vec{a} = \vec{\alpha}_0 + \frac{1}{\kappa_0}\vec{n}_0 - \frac{\dot{\kappa}_0}{\kappa_0^2\tau_0}\vec{b}_0.$$

Ya que el vector posición del centro de curvatura K es $\vec{c} = \vec{\alpha}_0 + (1/\kappa_0)\vec{n}_0$, tenemos

$$\overrightarrow{KC} = \vec{a} - \vec{c} = -\frac{\dot{\kappa}_0}{\kappa_0^2\tau_0}\vec{b}_0.$$

El radio de la esfera osculatriz es pues

$$R = \sqrt{\frac{1}{\kappa_0^2} + \frac{\dot{\kappa}_0^2}{\kappa_0^4 \tau_0^2}}.$$

□

Corolario 4.9 *El plano osculador corta a la esfera osculatriz a lo largo de la circunferencia osculatriz.* □

4.4 Curvas esféricas

Si una curva está enteramente en una esfera, entonces esta esfera es la esfera osculatriz de la curva en todo punto. Consecuentemente, el radio de la esfera osculatriz como una función del parámetro es constante, y también lo es el vector posición del centro de la esfera osculatriz.

Inversamente, si todas las esferas osculatrices en varios puntos de la curva coinciden, entonces la curva está en esta esfera constante.

Encontraremos una condición necesaria y suficiente para que el centro y radio de la esfera osculatriz sea constante:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{\alpha} + \frac{1}{\kappa}\vec{n} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\vec{b} \\
\dot{\vec{a}} &= \dot{\vec{\alpha}} + \frac{1}{\kappa}\dot{\vec{n}} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}\vec{n} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)\vec{b} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\dot{\vec{b}} = \\
&= \vec{t} + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}) - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}\vec{n} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)\vec{b} + \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\tau\vec{n} = \\
&= \left[\frac{\tau}{\kappa} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)\right]\vec{b}.
\end{aligned}$$

Esto implica que el centro de la esfera osculatriz es constante si y sólo si

$$\frac{\tau}{\kappa} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right) = 0.$$

Por otra parte tenemos:

$$\begin{aligned}
R^2 &= \frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)^2, \\
\frac{dR^2}{ds} &= -2\kappa\dot{\kappa}\kappa^{-4} + 2\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right) = \\
&= -\frac{2\tau\dot{\kappa}}{\kappa^3\tau} + \frac{2\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right) = \\
&= -\frac{2\dot{\kappa}}{\tau\kappa^2}\left[\frac{\tau}{\kappa} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)\right].
\end{aligned}$$

Así, bajo la suposición de que $\kappa \neq 0$, $\tau \neq 0$, esta derivada es nula si

$$\frac{\tau}{\kappa} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot\kappa}{\kappa^2\tau}\right) = 0.$$

Consecuentemente, en este caso, el radio y el centro de la esfera osculatriz son constantes. Y tenemos la siguiente caracterización de curvas esféricas:

Proposición 4.10 *Una curva de clase C^4 tal que $\kappa \neq 0$, $\tau \neq 0$, está en una esfera si y sólo si*

$$\frac{\tau}{\kappa} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot\kappa}{\kappa^2\tau}\right) = 0.$$

□

4.5 Ecuación de Riccati

La ecuación de Riccati:

$$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x), \tag{4.10}$$

se puede resolver completamente cuando se conoce una integral primera y_1; pues sustituyendo $y = y_1 + z$, resulta la nueva ecuación:

$$y_1' + z' = A(x)y_1^2 + B(x)y_1 + C(x) + 2A(x)y_1z + A(x)z^2 + B(x)z,$$

que simplificada, por satifacer y_1 a la ecuación (4.10) , resulta:

$$z' = \big(2A(x)y_1 + B(x)\big)z + A(x)z^2.$$

Que es una ecuación de Bernoulli ($n = 2$), que se convierte en lineal, dividiendo por z^2 y poniendo $u = 1/z$:

$$u' = \big(-2A(x)y_1 + B(x)\big)u - A(x).$$

Integrando esta ecuación se deduce la solución de la ecuación (4.10) mediante la transformación:

$$y = y_1 + \frac{1}{u}.$$

Ecuación de Bernoulli

$$y' + yP(x) = y^nQ(x).$$

Mediante la transformación $u = y^{1-n} \Rightarrow y^{-n}y' = (1/1{-}n)u'$, resulta (en nuestro caso $n = 2$):

$$u' + (1-n)uP(x) = (1-n)Q(x).$$

Ecuación lineal

$$y' + yP(x) = Q(x). \qquad \text{Solución:} \;\; ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Ejemplo 4.11 Resolver la ecuación de Riccati $y' = x^{-2} - x^{-1}y - y^2$.

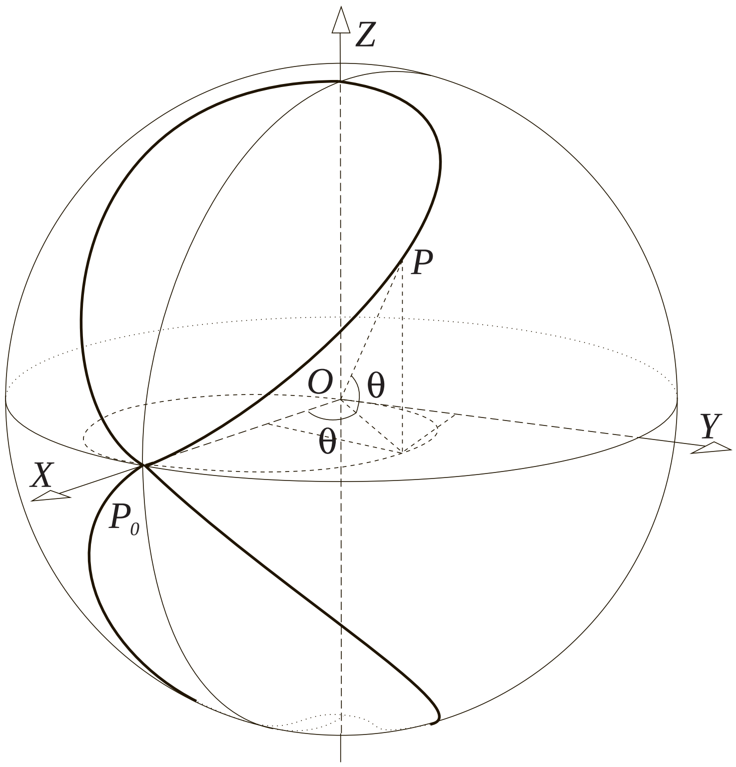
Una solución particular es $y = -1/x$ y con la sustitusición $y = -1/x + 1/u$, resulta la ecuación lineal: $u' + u/x = 1$, cuya solución general es: $u = (x^2 + c)/2x$.

Resultando como solución general de la ecuación de Riccati dada, el haz de cúbicas:

$$y = \frac{2x}{x^2 + c} - \frac{1}{2}.$$

Ejemplos

Ejemplo 4.12 Un punto P que parte desde $P_0(1, 0, 0)$ (en coordenadas cartesianas) recorre con movimiento uniforme, de velocidad angular constante, la circunferencia de centro $O(0, 0, 0)$ y radio 1 del plano XOZ; al mismo tiempo gira el plano que contiene a dicha circunferencia, también con movimiento uniforme con la misma velocidad angular, alrededor del eje OZ.



La tayectoria del punto P es la curva $\mathcal{C}$ situada en la esfera de centro O y radio 1, descrita por la representación paramétrica

$$\vec{\alpha}(\theta) = (\cos^2\theta, \cos\theta \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\theta).$$

La proyección de la curva $\mathcal{C}$ sobre el plano XOY es una circunferencia de radio 1/2 y centro en $(1/2, 0, 0)$; en efecto, dicha proyección es

$$\overrightarrow{\alpha*}(\theta) = (\cos^2\theta, \cos\theta \operatorname{sen}\theta, 0),$$

que satisface a la ecuación:

$$(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4.$$

También podemos verificar que $\overrightarrow{\alpha*}$ es circunferencia dicha, comprobando que tiene curvatura constante y calculando su centro (centro de curvatura):

$$\overrightarrow{\alpha*}'(\theta) = (-2\cos\theta \operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta, 0) = (-\operatorname{sen}2\theta, \cos 2\theta, 0),$$

$$\overrightarrow{\alpha *''}(\theta) = (-2\cos 2\theta, -2\,\mathrm{sen}\, 2\theta, 0).$$

$$\kappa * = \begin{vmatrix} -\,\mathrm{sen}\, 2\theta & \cos 2\theta \\ -2\cos 2\theta & -2\,\mathrm{sen}\, 2\theta \end{vmatrix} = 2.$$

Luego el centro de curvatura es

$$\overrightarrow{\alpha *}(\theta) + \frac{1}{\kappa *}\frac{1}{2}\overrightarrow{\alpha *''}(\theta) = (1/2, 0, 0).$$

La curva $\mathcal{C}$ queda definida como la intersección de la esfera y el cilindro

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad\qquad (x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4.$$

Esto nos permitirá calcular las rectas tangente, normal principal y binormal, así como los planos osculador, normal y rectificante a dicha curva en el punto de coordenadas $(0, 0, 1)$, sin que tener que parametrizar la curva con el parámetro arco.

Tomando y como parámetro y derivando tenemos

$$\left.\begin{array}{l} xx' + y + zz' = 0 \\ (x - 1/2)x' + y = 0 \end{array}\right\}, \qquad \text{que en el punto } (0,0,1): \quad (x', y', z') = (0, 1, 0).$$

$$\left.\begin{array}{l} x'^2 + xx'' + 1 + z'^2 + zz'' = 0 \\ x'^2 + (x - 1/2)x'' + 1 = 0 \end{array}\right\}, \quad \text{en } (0,0,1): \ (x'', y'', z'') = (2, 0, -1).$$

Con estos dos vectores, ahora es inmediato, determinar las rectas y planos del triedro de Frenet en $(0, 0, 1)$:

Recta tangente (dirección, $(0, 1, 0)$): $x = 0$, $z = 1$.

Recta binormal (dirección, $(0, 0, 1) \times (2, 0, -1)$ =(-1,0,-2)): $y = 0, 2x - z + 1 = 0$.

Recta normal (dirección, $(0, 1, 0) \times (1, 0, 2) = (2, 0, -1)$): $y = 0$, $x + 2z - 2 = 0$.

Plano osculador (perpendicular a $(1, 0, 2)$): $x + 2z - 2 = 0$.

Plano normal (perpendicular a $(0, 1, 0)$): $y = 0$.

Plano rectificante (perpendicular a $(2, 0, -1)$): $2x - z + 1 = 0$.

A esta curva $\mathcal{C}$ se le conoce como bóveda de Viviani y además de ser la intersección de

$$\text{Esfera: } x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \text{y} \quad \text{Cilindro: } x^2 + y^2 - x = 0,$$

es la intersección de

$$\text{Cono: } z^2 = (x - 1)^2 + y^2, \quad \text{y} \quad \text{Cilíndro parabólico: } z^2 = 1 - x.$$

Así como la intersección de la esfera y cono, esfera y cilindro parabólico, cilindro y cono, cilindro y cilindro parabólico, considerados.

Se obtiene la bóveda de Viviani poniendo la punta de un compás en el interior de un cilindro de revolución y trazando sobre este cilindro una circunferencia del mismo radio que el diámetro del cilindro.

TEMA V

Curvas deducidas de otras

Este tema lo dedicamos a obtener ciertas curvas $\mathcal{C}_1$ a partir de una curva dada $\mathcal{C}$, estableciendo una correspondencia entre sus puntos, basándonos en determinadas propiedades geométricas.

Trataremos de caracterizar tales curvas $\mathcal{C}_1$ mediante sus ecuaciones paramétricas. Tiene fundamental interés estudiar las propiedades de las curvas $\mathcal{C}_1$ y, en particular, investigar su relación con la curva dada $\mathcal{C}$; para lo cual es conveniente referir los puntos de $\mathcal{C}_1$ a un sistema de coordenadas asociado a un punto variable de la curva $\mathcal{C}$. Por lo que podemos considerar este tema como una aplicación de resultados obtenidos fundamentalmente en los dos temas anteriores, a la resolución de ciertos ejercicios, para lo cual necesitamos además algunos conocimientos relativos a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales.

5.1 Evolutas de una curva

Una curva en el espacio tiene infinitas normales en todo punto. Ellas son las rectas que pasan por el punto y son perpendiculares a la tangente en el punto; así ellas están situadas en el plano normal que es generado por los vectores $\vec{n}$ y $\vec{b}$.

Consideremos una familia uniparamétrica de normales a la curva $\mathcal{C}$ con ecuación paramétrica $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3 \quad s \mapsto \vec{\alpha}(s)$ tal que a cada s corresponde una normal en el punto correspondiente a s, y el vector dirección de la normal es una función diferenciable del parámetro.

Definición 5.1 *Una curva $\mathcal{C}_1$ cuyas tangentes constituyen una familia uniparamétrica de normales de la curva $\mathcal{C}$, siendo el vector dirección de las normales una función diferenciable del parámetro, se dice que es una* evoluta *de la curva $\mathcal{C}$.*

Tratamos de encontrar las evolutas de una curva de clase C^3. Sea la ecuación de $\mathcal{C}$ $\quad \overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3 \quad s \mapsto \vec{\alpha}(s)$ con parametrización natural. Si una evoluta existe, el vector posición de sus puntos viene dado por:

$$\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(s) + \lambda(s)\vec{n}(s) + \mu(s)\vec{b}(s),$$

donde λ, μ son funciones del parámetro s (nótese que el parámetro s no es necesariamente natural para la evoluta $\mathcal{C}_1$).

En el supuesto que las funciones λ y μ sean diferenciables, tratemos de determinarlas.

La ecuación del vector tangente a la curva $\mathcal{C}_1$ es:

$$\vec{\beta}' = \dot{\vec{\alpha}} + \dot{\lambda}\vec{n} + \lambda\dot{\vec{n}} + \dot{\mu}\vec{b} + \mu\dot{\vec{b}}.$$

Usando las fórmulas de Frenet obtenemos:

$$\vec{\beta}' = \vec{t} + \dot{\lambda}\vec{n}(s) + \lambda(-\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}) + \dot{\mu}\vec{b} - \mu\tau\vec{n}.$$

$$\vec{\beta}' = (1 - \lambda\kappa)\vec{t} + (\dot{\lambda} - \mu\tau)\vec{n} + (\lambda\tau + \dot{\mu})\vec{b}.$$

Pero este vector tangente debe ser paralelo al vector $\lambda\vec{n} + \mu\vec{b}$. Así:

$$\vec{\beta}' \times (\lambda\vec{n} + \mu\vec{b}) = \vec{0},$$

esto es

$$1 - \lambda\kappa = 0, \qquad \mu(\dot{\lambda} - \mu\tau) - \lambda(\lambda\tau + \dot{\mu}) = 0.$$

La primera ecuación implica que

$$\lambda = \frac{1}{\kappa},$$

es decir, λ es igual al radio de curvatura de la curva $\mathcal{C}$ (con $\kappa \neq 0$). Por tanto, el punto de vector posición $\vec{\alpha} + \lambda\vec{n}$ es el centro de curvatura, y el punto de la evoluta con vector de posición $\vec{\alpha} + \lambda\vec{n} + \mu\vec{b}$ está situado en la polar de la curva $\mathcal{C}$ en s. ¡No existe punto en la evoluta correspondiente a un punto de la curva en el que $\ddot{\vec{\alpha}} = \vec{0}$!

La segunda ecuación es una ecuación diferencial que puede transformarse como sigue:

$$\mu\dot{\lambda} - \mu^2\tau = \lambda^2\tau + \lambda\dot{\mu} \;\Rightarrow\; \mu\dot{\lambda} - \lambda\dot{\mu} = (\lambda^2 + \mu^2)\tau \;\Rightarrow\; \frac{\mu\dot{\lambda} - \lambda\dot{\mu}}{\lambda^2} = \left(1 + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2\right)\tau$$

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \left(1 + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2\right)\tau \;\Rightarrow\; -\frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{1 + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2} = \tau \;\Rightarrow\; \frac{d}{ds}\left(\text{arccotg}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\right) = \tau$$

Integrando:

$$\operatorname{arccotg}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \int \tau(s)ds + c, \qquad (c, \quad \text{constante})$$

y finalmente

$$\mu = \lambda \cot\left(\int \tau(s)ds + c\right)$$

Así la ecuación de la evoluta, si existe, es:

$$\boxed{\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(s) + \tfrac{1}{\kappa(s)}\vec{n}(s) + \tfrac{1}{\kappa(s)} \operatorname{cotg}\left(\textstyle\int \tau(s)ds + c\right)\vec{b}(s)}$$

Nota 5.2 Si la curva es plana, entonces $\tau = 0$, y existe entre las evolutas de la curva una que está situada en el mismo plano de la curva. La ecuación de ésta es:

$$\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\vec{n},$$

la evoluta plana es, por tanto, el lugar de los centros de curvatura de la curva dada.

Nota 5.3 En el caso general ($\tau \neq 0$) el lugar de los centros de curvatura no es una evoluta, ya que las tangentes a este lugar geométrico pueden no intersecar a la curva dada.

5.2 Involutas de una curva

Definición 5.4 *Una curva $\mathcal{C}_1$ que interseca según un ángulo recto a las tangentes de una curva $\mathcal{C}$ se llama* involuta *de $\mathcal{C}$.*

Se deduce obviamente de esta definición que "$\mathcal{C}_1$ es una involuta de $\mathcal{C}$ si sólo si $\mathcal{C}$ es una evoluta de $\mathcal{C}_1$."

Sea $\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3$ una representación paramétrica natural de clase C^2 de una curva $\mathcal{C}$, entonces la ecuación de una involuta, supuesta que existe, será de la forma:

$$\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(s) + \lambda(s)\vec{t}(s).$$

Esta será la ecuación paramétrica de una involuta si y sólo si su vector tangente $\vec{\beta}'$ es ortogonal al vector tangente $\vec{t}$ de la curva original $\mathcal{C}$. Esta condición nos permite calcular la función $\lambda(s)$:

$$\vec{\beta}' = \dot{\vec{\alpha}} + \dot{\lambda}\vec{t} + \lambda\dot{\vec{t}} = (1 + \dot{\lambda})\vec{t} + \lambda\kappa\vec{n}.$$

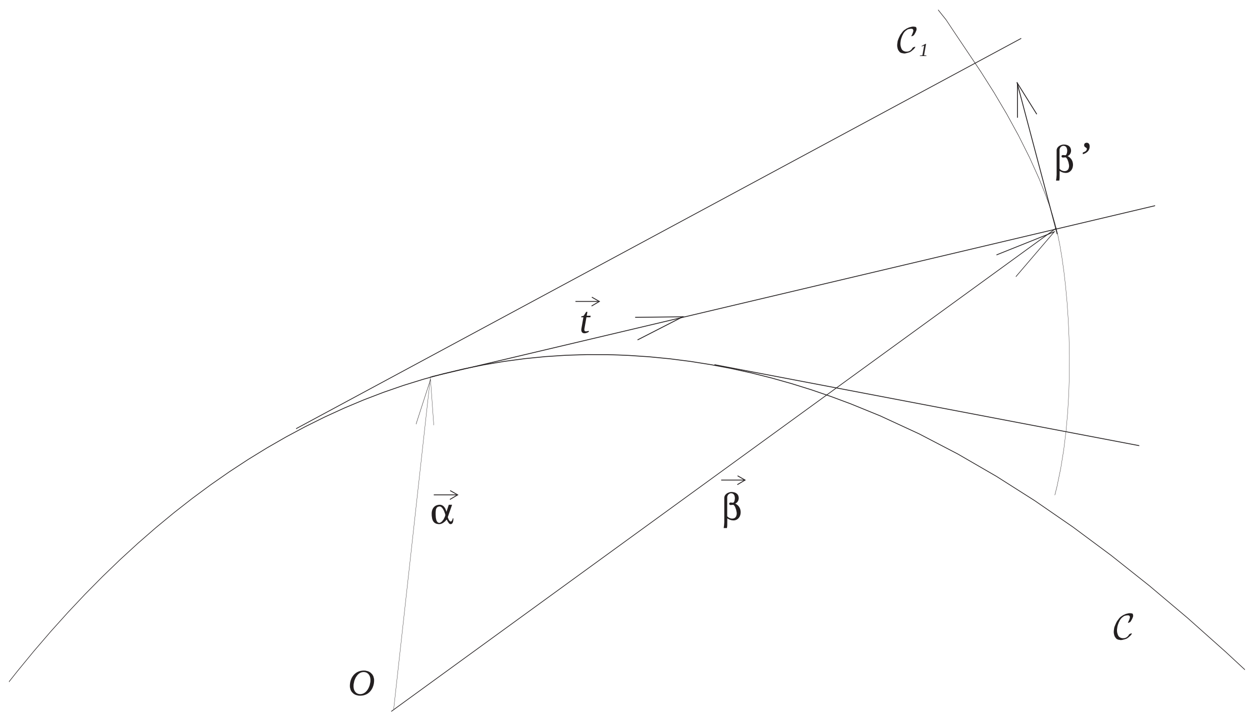
La condición $\vec{\beta}' \cdot \vec{t} = 0$, implica

$$1 + \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \dot{\lambda} = -1 \Rightarrow \lambda = s_0 - s,$$

donde s_0 es una constante arbitraria.

Entonces la ecuación de una involuta es

$$\boxed{\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(s) + (s_0 - s)\vec{t}(s)}$$



5.3 Curvas paralelas

Definición 5.5 *Dos curvas son* paralelas *en caso de que sea posible establecer una correspondencia biyectiva entre sus puntos de tal forma que puntos correspondientes estén a igual distancia y además las tangentes en puntos correspondientes sean paralelas.*

Dos involutas de una curva $\mathcal{C}$ son paralelas, para las que puntos correspondientes están sobre una tangente a $\mathcal{C}$. De una curva puede decirse que es paralela a sí misma, la distancia entre puntos correspondientes es cero en este caso.

Determinemos ahora todas las curvas paralelas a una curva dada $\mathcal{C}$, distinta de una recta y de una curva plana. Para este propósito, consideremos la ecuación paramétrica $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3 \quad s \mapsto \vec{\alpha}(s)$ de una curva curva $\mathcal{C}$, con parametrización natural; el vector posición de una curva $\mathcal{C}_1$ paralela a $\mathcal{C}$, será

$$\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(s) + \xi(s)\vec{t}(s) + \eta(s)\vec{n}(s) + \zeta(s)\vec{b}(s),$$

y como la tangente a $\mathcal{C}_1$ debe ser paralela a la de $\mathcal{C}$, esto es, perpendicular a la normal y a la binormal de $\mathcal{C}$, resulta

$$\vec{\beta}' = \vec{t} + \dot{\xi}\vec{t} + \xi\kappa\vec{n} + \dot{\eta}\vec{n} + \eta(-\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}) + \dot{\zeta}\vec{b} - \tau\zeta\vec{n},$$

$$\vec{n}\cdot\vec{\beta}' = \kappa\xi + \dot{\eta} - \tau\zeta = 0, \qquad \vec{b}\cdot\vec{\beta}' = \tau\eta + \dot{\zeta} = 0,$$

y además como $\|\vec{\beta}(s) - \vec{\alpha}(s)\| = c$ (constante), resulta

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2 \qquad \text{de donde} \qquad \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta} = 0.$$

Tenemos así que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\tau\zeta = \kappa\xi + \dot{\eta}, \qquad \dot{\zeta} = -\tau\eta, \qquad \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta} = 0.$$

El resultado de eliminar $\dot{\xi}$ y $\dot{\eta}$ entre estas ecuaciones es

$$\xi(\dot{\xi} - \kappa\eta) = 0.$$

Tendremos que considerar tres casos, según que ambos factores se anulen ó $\xi \neq 0$ ó $\dot{\xi} - \kappa\eta \neq 0$.

• En el *primer caso*, las condiciones $\xi = 0$ y $\dot{\xi} = \kappa\eta$, implican que $\xi = 0, \eta = 0$ y $\zeta = 0$. Entonces, en este caso la curva $\mathcal{C}_1$ paralela a la curva $\mathcal{C}$ coincide con $\mathcal{C}$:

$$\boxed{\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(s)} \tag{5.1}$$

• En el *segundo caso*, tales curvas son caracterizadas por $\xi \neq 0$ y $\dot{\xi} - \kappa\xi = 0$. En consecuencia, las curvas paralelas se obtienen resolviendo las ecuaciones diferenciales

$$\dot{\xi} = \kappa\eta, \qquad \dot{\eta} = -\kappa\xi + \tau\zeta \qquad \dot{\zeta} = -\tau\eta,$$

sistema que es similar al (4.5) para cada uno de los valores de $i = 1, 2, 3$; por lo que la solución más general es

$$\xi = a_1t^1 + a_2t^2 + a_3t^3 \qquad \eta = b_1n^1 + b_2n^2 + b_3n^3 \qquad \zeta = c_1b^1 + c_2b^2 + c_3b^3,$$

donde los a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ son constante que verifican $a_i = b_i = c_i$.

Las ecuaciones de las curvas paralelas a la curva $\mathcal{C}$ serán

$$\vec{\beta} = \vec{\alpha} + \Big(\sum_{i=1}^{3} a_i(t^1t^i + n^1n^i + b^1b^i), \sum_{i=1}^{3} a_i(t^2t^i + n^2n^i + b^2b^i), \sum_{i=1}^{3} a_i(t^3t^i + n^3n^i + b^3b^i)\Big).$$

Y, por el mismo razonamiento hecho en la página 42, tenemos, si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, que

$$\boxed{\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(s) + \vec{a}.} \tag{5.2}$$

Así, en este caso, las curvas paralelas se obtienen a partir de $\mathcal{C}$ por traslaciones.

• El *tercer caso* está caracterizado por las condiciones $\xi = 0$ y $\dot{\xi} - \kappa\eta = 0$. Es evidente que $\eta \neq 0$, y la solución del problema pasa por integrar el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\eta} = \tau\zeta, \qquad \dot{\zeta} = -\tau\eta, \qquad \eta^2 + \zeta^2 = c^2 \ \ (c \neq 0)$$

O sea,

$$\frac{d\eta}{\sqrt{c^2 - \eta^2}} = \tau ds \qquad\qquad \frac{d\zeta}{\sqrt{c^2 - \zeta^2}} = -\tau ds.$$

Cuya solución es

$$\xi = 0 \qquad \eta = c \operatorname{sen}\left(\int \tau ds + h\right) \qquad \zeta = c\cos\left(\int \tau ds + h\right) \qquad (h \ \ \text{constante})$$

En este caso las curvas paralelas a $\mathcal{C}$ vienen dadas por

$$\boxed{\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(s) + c\operatorname{sen}\left(\textstyle\int \tau ds + h\right)\vec{n} + c\cos\left(\textstyle\int \tau ds + h\right)\vec{b}.} \tag{5.3}$$

Estas son curvas (distintas de $\mathcal{C}$, pues $c \neq 0$) que son paralelas a $\mathcal{C}$ y no se obtienen por traslaciones de la curva $\mathcal{C}$.

Otra caracterización de curvas paralelas está dada por:

Proposición 5.6 *Las trayectorias ortogonales de los planos normales a una curva $\mathcal{C}$ son paralelas a $\mathcal{C}$.*

Demostración.- Si $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3$ es la parametrización natural de $\mathcal{C}$, las trayectorias ortogonales a sus planos normales vendrán dadas por

$$\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(s) + \eta(s)\vec{n}(s) + \zeta(s)\vec{b}(s).$$

Por tanto, debe verificarse que

$$\dot{\xi} - \tau\zeta = 0 \qquad\qquad \dot{\zeta} + \tau\eta = 0,$$

de donde, eliminando τ, resulta

$$\eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta} = 0 \qquad \text{por lo que} \qquad \eta^2 + \zeta^2 = c^2 \quad (c, \ \ \text{constante})$$

Luego, las curvas de parametrización $\vec{\beta}$ son paralelas a $\mathcal{C}$ y sus ecuaciones vienen dadas por (5.3); incluyéndose además la propia curva $\mathcal{C}$ si $c = 0$, pues entonces $\eta = 0$ y $\zeta = 0$.

Utilizando todo lo obtenido hasta sobre curvas paralelas ((5.2), (5.3) y Proposición 5.6), podemos enunciar:

Proposición 5.7 *Las curvas paralelas a una curva dada $\mathcal{C}$, que no sea una recta ni una curva plana, son las curvas obtenidas por traslaciones de $\mathcal{C}$ y las trayectorias ortogonales a los planos normales de $\mathcal{C}$.* □

5.4 Envolvente de curvas planas

Definición 5.8 *Una* familia uniparamétrica de curvas planas $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in I}$ *es el conjunto de curvas en el plano cuyas ecuaciones vienen dadas implícitamente o paramétricamente por:*

$$f(x, y, \lambda) = 0; \qquad x = x(t, \lambda) \quad y = y(t, \lambda)$$

respectivamente.

La familia recibe el nombre de haz de curvas *cuando f es lineal en λ.*

Se puede definir también familia de curvas dependientes de varios parámetros.

Ejemplo 5.9 La familia de curvas

$$(x - \lambda)^2 + y^2 = 1, \qquad -\infty < \lambda < \infty,$$

está formada por todas las circunferencias de radio 1, con centro en el eje OX.

Ejemplo 5.10 La familia con dos parámetros u, v

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = 1,$$

representa todas las circunferencias de radio 1, con centros en el plano XY. Para $v = 0$ se obtiene la familia unipamétrica del Ejemplo 5.9.

Ejemplo 5.11 El par de ecuaciones:

$$x = \lambda \cos\varphi \quad y = \lambda \operatorname{sen}\varphi \quad (\, 0 < \lambda < \infty, \;\, 0 \le \varphi \le 2\pi \,)$$

representan, para cada λ, una circunferencia de centro O y radio λ.

Ejemplo 5.12 La familia de curvas dada en forma paramétrica:

$$x = \lambda + \cos\varphi, \qquad y = \operatorname{sen}\varphi, \qquad (\, -\infty < \lambda < \infty, \;\, 0 \le \varphi \le 2\pi \,),$$

es la misma familia del Ejemplo 5.9.

Definición 5.13 *Se llama* envolvente *de una familia de curvas planas $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in I}$ a una curva $\mathcal{E}$, no comprendida en la familia, tal que en cada uno de sus puntos es tangente a una curva de la familia.*

Veamos ahora cómo se obtiene la envolvente de una familia de curvas.

A) Caso de curvas dadas en forma implícita

Proposición 5.14 *Para que exista una envolvente $\mathcal{E}$, de ecuación paramétrica regular $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$, de la familia unipamétrica de curvas planas $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in I}$ dadas en forma implícita por la ecuación:*

$$f(x, y, \lambda) = 0, \tag{5.4}$$

teniendo f primeras derivadas continuas y verificando además, al menos en los puntos de contacto, $f_x^2 + f_y^2 \neq 0$ [(1)]*, es necesario que satisfaga al sistema*

$$\begin{aligned} f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) &= 0 \\ f_\lambda(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) &= 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Por tanto, si existe envolvente de (5.4), ésta se encontará entre las soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} f(x, y, \lambda) &= 0 \\ f_\lambda(x, y, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Demostración.- Supongamos que en un cierto intervalo del parámetro λ, la familia $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in I}$ tenga una envolvente $\mathcal{E}$ regular respecto a dicho parámetro λ. Esta envolvente $\mathcal{E}$ vendrá representada paramétricamente por:

$$x = x(\lambda), \qquad y = y(\lambda),$$

con la condición $x'^2 + y'^2 \neq 0$, al suponerse regular, a fin de que la tangente a $\mathcal{E}$ exista en todos sus puntos. El valor del parámetro λ es el correspondiente a la curva de la familia $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in I}$ que contiene al punto de contacto de la envolvente. Por tanto, en el intervalo considerado, las ecuaciones de la envolvente deben satisfacer a (5.4), es decir se verificará:

$$f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0.$$

Por derivación respecto a λ obtenemos:

$$f_x x'(\lambda) + f_y y'(\lambda) + f_\lambda = 0.$$

En un punto P de contacto la tangente común a la curva de la familia $\mathcal{C}_\lambda$ y a la envolvente $\mathcal{E}$ tienen de pendientes, respectivamente:

$$-\frac{f_x}{f_y} \quad \text{y} \quad \frac{y'(\lambda)}{x'(\lambda)},$$

y como ambas deben ser iguales, se verificará:

$$f_x\, x'(\lambda) + f_y\, y'(\lambda) = 0;$$

expresión que, junto con la anterior, implica que

$$f_\lambda(x, y, \lambda) = 0.$$

□

(1) Para que los puntos sean regulares y la curva tenga asegurada una tangente en ellos.

Proposición 5.15 *Si $f(x, y, \lambda) = 0$ es la ecuación de una familia uniparamétrica de curvas planas $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in I}$ y se verifica:*

$$\Delta = \frac{\partial(f, f_\lambda)}{\partial(x, y)} \neq 0 \quad \text{y} \quad f_{\lambda\lambda} \neq 0,$$

entonces existe una curva $\mathcal{E}$ envolvente de la familia $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in I}$ tangente a las curvas de la familia en sus puntos ordinarios.

Demostración.- La primera parte, es decir la existencia de la solución $x = x(t), \quad y = y(t)$, se sigue inmediatamente debido al teorema de la función implícita al ser $\Delta \neq 0$.

Por otra parte, derivando en (5.5), respecto a λ, obtenemos el sistema:

$$\begin{array}{l} f_x \, x'(\lambda) + f_y \, y'(\lambda) + f_\lambda = 0 \\ f_{\lambda x} \, x'(\lambda) + f_{\lambda y} \, y'(\lambda) + f_{\lambda\lambda} = 0. \end{array}$$

sistema equivalente al:

$$\begin{array}{l} f_x \, x'(\lambda) + f_y \, y'(\lambda) = 0 \\ f_{\lambda x} \, x'(\lambda) + f_{\lambda y} \, y'(\lambda) + f_{\lambda\lambda} = 0, \end{array}$$

al ser $f_\lambda = 0$. Pero, por las hipótesis impuestas, este sistema tiene solución $x'(\lambda), y'(\lambda)$ no idénticamente nula. Y la primera de éstas, expresa la condición de tangencia entre $\mathcal{E}$ y $\mathcal{C}_\lambda$. □

Nota 5.16 Hay que tener en cuenta que, al hallar la envolvente, la solución del sistema que permite determinar la envolvente puede contener no sólo a la envolvente de la familia, sino también al lugar de los puntos singulares de la familia y a algunas curvas de la propia familia.

Veamos, lo relativo a los puntos singulares:

El lugar de los puntos singulares de la familia de curvas (5.4) se obtiene como solución $x = x(\lambda), y = y(\lambda)$ del sistema $f_x(x, y, \lambda) = 0, f_y(x, y, \lambda) = 0$. Estas soluciones satisfacen no sólo a $f(x, y, \lambda) = 0$, sino también a $f_\lambda(x, y, \lambda) = 0$; pues, derivando en $f(x, y, \lambda) = 0$, obtenemos $f_x \, x'(\lambda) + f_y \, y'(\lambda) + f_\lambda = 0$, y como en tales puntos $f_x = f_y = 0$, resulta $f_\lambda = 0$.

Ejemplo 5.17 (Ejemplo 5.9) Sea la familia de circunferencias de radio 1 y centro en el eje OX:

$$(x - \lambda)^2 + y^2 = 1.$$

Tendremos

$$f_\lambda(x, y.\lambda) = -2(x - \lambda) \quad \Rightarrow \quad 2(x - \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \lambda,$$

que llevada a la ecuación de la familia, nos da $y = \pm 1$, que son las ecuaciones de las dos rectas envolventes.

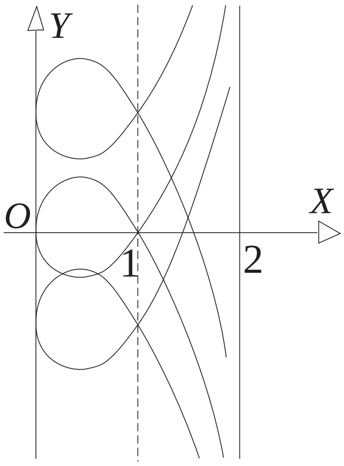
Las condiciones de la Proposición 5.15, se cumplen evidentemente.

Ejemplo 5.18 Consideremos la familia de astrofoides

$$f(x,y,\lambda) = (x^2 + (y-\lambda)^2)(x-2) + x = 0.$$

Tendremos

$$f_\lambda(x,y,\lambda) = -2(y-\lambda)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \lambda; \;\; x = 2.$$



La $x = 2$, corresponde a una asíntota, que descartamos como envolvente ya que no es tangente en puntos propios, de hecho se trata de una curva de la familia ($\lambda = \infty$).

La $y = \lambda$, llevada a la ecuación de la familia, nos da

$$x^2(x-2) + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0; \;\; x = 1.$$

La recta $x = 1$ es el lugar geométrico de los puntos dobles ($f_x = f_y = f_\lambda = 0$); por tanto, no forma parte de la envolvente.

La recta $x = 0$ es, evidentemente, la única envolvente.

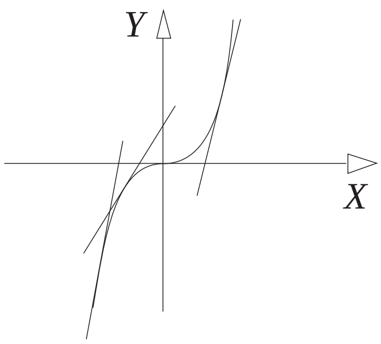
Fijémonos que en el caso de los puntos singulares, no se cumple la primera condición de la Proposición 5.15.

Ejemplo 5.19 Sea la familia de rectas

$$f(x,y,\lambda) = y - \lambda^3 - 3\lambda^2(x-\lambda) = 0.$$

Resulta ser:

$$f_\lambda(x,y,\lambda) = -6\lambda(x-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0; \;\; \lambda = x.$$



Para $x = \lambda$ obtenemos la parábola cúbica $y = x^3$, que es la envolvente (toda la curva es la envolvente de sus propias tangentes).

Para $\lambda = 0$ obtenemos la curva de la familia $y = 0$, que no se considera como envolvente y que es la tangente a la curva en su punto de inflexión.

B) Envolventes de curvas planas dadas en forma paramétrica

Proposición 5.20 *Para que exista envolvente $\mathcal{E}$ regular de la familia de curvas planas $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in I}$ dada en forma paramétrica por la ecuación vectorial $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t,\lambda)$, donde $\vec{\alpha}$ está definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, con derivadas continuas $\vec{\alpha}_t, \vec{\alpha}_\lambda$ y tal que $\vec{\alpha}_t \neq \vec{0}$, es necesario que se verifique*

$$\frac{\partial(\alpha^1, \alpha^2)}{\partial(t,\lambda)} = 0.$$

Demostración.- Si existe una envolvente regular $\mathcal{E}$, ésta tendrá una ecuación de la forma

$$\vec{\beta(\lambda)} = \vec{\alpha}(t(\lambda), \lambda),$$

que resulta de sustituir en $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t, \lambda)$ la dependencia funcional regular $t = t(\lambda)$ que exigimos debe existir entre t y λ en los puntos de contacto de la envolvente con las curvas de la familia.

Un vector tangente a la envolvente será de la forma

$$\frac{d\vec{\beta}}{d\lambda} = \frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial\lambda} + \frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial t}\frac{dt}{d\lambda},$$

mientras que un vector tangente a una curva de la familia es

$$\frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial t}.$$

En el punto de contacto entre envolvente y curva de la familia, deberán ser linealmente dependientes ambos vectores, es decir, el determinante

$$\left|\frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial\lambda}\frac{dt}{d\lambda}, \quad \frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial\lambda}\right| = 0,$$

de donde se obtiene

$$\left|\frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial t}, \quad \frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial\lambda}\right| = 0$$

□

Proposición 5.21 *Para que la familia $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in I}$ de curvas planas de ecuación $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t,\lambda)$, tenga envolvente en un entorno de un punto $(a,b) \in D$, es suficiente que la función*

$$\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \phi(t,\lambda) = \frac{\partial(\alpha^1, \alpha^2)}{\partial(t,\lambda)},$$

verifique:

1) $\phi(a,b) = 0$.

2) ϕ *diferenciable.*

3) ϕ_λ *continua y* $\phi_\lambda(a,b) \neq 0$.

o 3′) ϕ_t *continua y* $\phi_t(a,b) \neq 0$.

La envolvente se encuentra entonces eliminando λ o t entre las ecuaciones:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t,\lambda), \qquad \phi(t,\lambda) = \frac{\partial(\alpha^1, \alpha^2)}{\partial(t,\lambda)} = 0.$$

Demostración.- Como las condiciones del teorema de la función implícita se cumplen en un entorno del punto $(a,b) \in D$, la función $\phi(t,\lambda) = 0$ define un función continua y diferenciable en $(a,b) \in D$, $\lambda = \lambda(t)$ y, por consiguiente, existe una curva

$$\vec{\beta}(t) = \vec{\alpha}(t, \lambda(t))$$

que cumple las condiciones de envolvente. □

Ejemplo 5.22 La familia de circunferencias del Ejemplo 5.9 de centro en el eje XY y radio 1, se puede poner en forma paramétrica

$$\vec{\alpha}(t,\lambda) = (t, \sqrt{1-(t-\lambda)^2}).$$

Condición de envolvente:

$$\frac{\partial(\alpha^1,\alpha^2)}{\partial(t,\lambda)} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{t-\lambda}{\sqrt{1-(t-\lambda)^2}} \\ 0 & \frac{t-\lambda}{\sqrt{1-(t-\lambda)^2}} \end{vmatrix} = 0,$$

de donde obtenemos $t = \lambda$.

Las condiciones de la Proposición 5.21 se cumplen, pues: $\phi(t,\lambda) = t - \lambda$ es diferenciable, $\phi(a,a) = 0$, y $\phi_\lambda(a,a) = -1$ (continua y no nula).

La envolvente se obtiene sustituyendo $\lambda = t$, en la ecuación de la familia.

Dicha envolvente está formada por las rectas $\vec{\alpha}(t) = (t, \pm 1)$.

Podemos usar otras parametrizaciones de esta familia de circunferencias, por ejemplo:

$$\overrightarrow{\alpha} : [0,2\pi] \to I\!R^3 \qquad \vec{\alpha}(t,\lambda) = (\lambda + \cos\ t, \text{sen}\ t).$$

Entonces, ϕ es diferenciable:

$$\phi(t,\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\text{sen}\ t \\ 0 & \cos\ t \end{vmatrix} = \cos t.$$

$$\phi(t,\lambda) = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = \pi/2,\ 3\pi/2$$

$\phi(\pi/2,\lambda) = 0,\ \phi(3\pi/2,\lambda) = 0,\ \phi_t(\pi/2,\lambda) = (-\text{sen}\ t)_{\pi/2,\lambda} \neq 0,\ \phi_t(3\pi/2,\lambda) \neq 0.$

Luego ϕ_t existe y es no nula.

Luego, la envolvente tiene por ecuación paramétrica: $\vec{\alpha}(\lambda) = (\lambda, \pm 1)$.

Nota 5.23 Si la familia de curvas viene dada en forma explícita

$$y = f(x,\lambda),$$

podemos considerar $x = t$ como parámetro y estamos en el caso B) anterior:

$$x = t \qquad y = f(t,\lambda).$$

También podemos poner la ecuación de la familia en forma implícita

$$F(x,y,\lambda) = y - f(x,\lambda) = 0,$$

y estamos en el caso A).

Y la condición necesaria para que existe envolvente en el caso B):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ f_x(x,\lambda) & f_\lambda(x,\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

se traduce en la condición necesaria del caso A):

$$F_\lambda(x,y,\lambda) = f_\lambda(x,\lambda) = 0.$$

Envolvente de una familia de curvas planas dependientes de dos parámetros

Sea una familia de curvas dependiente de dos parámetros λ, μ ligados por una ecuación, es decir

$$f(x, y, \lambda, \mu) = 0, \qquad \varphi(\lambda, \mu) = 0,$$

que supongamos admiten derivadas continuas.

Si la envolvente existe, como curva paramétrica dependiente de un parámetro t, se debe verificar:

$$\left.\begin{array}{c} f(x, y, \lambda, \mu) = 0 \\ \varphi(\lambda, \mu) = 0 \\ f_x x' + f_y y' + f_\lambda \lambda' + f_\mu \mu' = 0 \\ \varphi_\lambda \lambda' + \varphi_\mu \mu' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f(x, y, \lambda, \mu) = 0 \\ \varphi(\lambda, \mu) = 0 \\ \begin{vmatrix} f_\lambda & f_\mu \\ \varphi_\lambda & \varphi_\mu \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right.$$

Por lo que para hallar la envolvente hay que eliminar λ y μ entre estas tres últimas ecuaciones.

Nota 5.24 De modo análogo se procede para hallar la envolvente de una familia de curvas planas dependiente de n parámetros:

$$f(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0,$$

ligados por $n - 1$ ecuaciones:

$$\varphi_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0,\ \varphi_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0,\ \ldots\ , \varphi_{n-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0.$$

Se demuestra que para hallar la envolvente hay que eliminar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ entre las n ecuaciones anteriores y la siguiente:

$$\frac{\partial(f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)} = 0.$$

Ejemplo 5.25 Envolvente de la familia de rectas:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

sobre las cuales los ejes de coordenadas determinan un segmento de longitud constante c, es decir, $a^2 + b^2 = c^2$.

$$\begin{vmatrix} -x/a^2 & -y/b^2 \\ 2a & 2b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\frac{2bx}{a^2} + \frac{2ay}{b^2} = 0$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} bx & + & ay & = & ab \\ -2b^3x & + & 2a^3 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{a^3}{c^2}; \qquad y = \frac{b^3}{c^2}$$

que junto con la dependencia de los parámetros, resulta:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = c^{2/3}.$$

Este ejemplo se puede poner también en la forma de una familia dependiente de un solo parámetro:

$$\frac{x}{c\ \cos\,\theta}+\frac{y}{c\,\mathrm{sen}\ \theta}=1.$$

Entonces:

$$f(x,y,\theta)=x\ \mathrm{sen}\ \theta+y\cos\,\theta-c\cos\,\theta\ \mathrm{sen}\ \theta=0.$$

$$f_\theta(x,y,\theta)=x\cos\,\theta-y\,\mathrm{sen}\ \theta-c\cos^2\theta+c\,\mathrm{sen}^2\theta=0.$$

Resolviendo este sistema obtenemos

$$x=c\cos^3\theta\qquad y=c\,\mathrm{sen}^3\,\theta$$

que nos da la misma solución que antes:

$$x^{2/3}+y^{2/3}=c^{2/3}.$$

Ejemplos

Ejemplo 5.26 *Una* transformación de Combescure *entre dos curvas es una correspondencia biyectiva entre los puntos de ambas curvas tal que las rectas tangentes en puntos correspondientes son paralelas. Entonces las normales principales son también paralelas y así mismo las binormales.*

Si $\vec\alpha=\vec\alpha(s)$ es la ecuación con parámetro arco de una de ellas, la ecuación de la otra será $\vec\beta(s)=\vec\alpha(s)+\vec a(s)$. Luego $\vec\beta'=\vec t+\vec a'$ y como, por hipótesis, $\vec\beta'$ es paralelo a $\vec t$, resulta que $\vec a=\vec a_0=cte.$ ó $\vec a'$ es paralelo a $\vec t$.

En el primer caso, $\vec\beta(s)=\vec\alpha(s)+\vec a_0$, y se verifican claramente las propiedades anunciadas.

En el segundo caso, $\vec a'(s)=\lambda(s)\vec t(s)$. Entonces

$$\vec\beta\,''=\kappa\vec n+\vec a''=\kappa\vec n+\lambda'\vec t+\lambda\kappa\vec n=\lambda'\vec t+\kappa(1+\lambda)\vec n.$$

Así, la dirección de la binormal de $\vec\beta$ es

$$\vec\beta'\times\vec\beta\,''=(1+\lambda)\vec t\times(\lambda'\vec t+(1+\lambda)\kappa\vec n)=(1+\lambda)^2\kappa\vec b.$$

Por lo que las binormales de $\vec\alpha$ y $\vec\beta$ son paralelas; y, por tanto, también lo serán las rectas normales.

TEMA VI

Representación paramétrica de superficies

Estudiaremos subconjuntos de $I\!R^3$ que pueden ponerse en correspondencia biyectiva con un conjunto del plano, es decir, que a cada punto de aquél le podemos asignar dos parámetros. Si un mismo subconjunto de $I\!R^3$ lo podemos parametrizar de diversas maneras, exigiremos que la relación entre cualquiera de estas parametrizaciones sea diferenciable.

6.1 Superficie simple

Definición 6.1 *Se llama* superficie simple *a un conjunto $\mathcal{M}$ en $I\!R^3$ que es imagen continua e inyectiva de un abierto del plano.*

Es decir, una superficie simple es el conjunto de puntos $\mathcal{M}$ en $I\!R^3$, cuyo vector posición viene dado por una función continua e inyectiva definida en un abierto A del plano

$$\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3 \qquad (u^1, u^2) \mapsto \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) \quad \vec{\mathbf{x}}(A) = \mathcal{M}.$$

Definición 6.2 *A la aplicación $\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3$ se le denomina* representación paramétrica *de la superficie simple.*

Dada una representación paramétrica $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$, los valores de los parámetros u^1 y u^2 determinan la posición del punto en la superficie.

Definición 6.3 *A estos parámetros se les llama* coordenadas curvilíneas *en la superficie.*

Si el valor de una de las coordenadas, sea u^2, es fijo y el otro, u^1, varía, los correspondientes puntos en la superficie quedan en una curva de ecuación $u^2 = u_0^2 = cte.$; esto es, $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3 \quad u^1 \mapsto \vec{\alpha}(u^1) = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u_0^2)$. Esta curva se llama *línea de coordenada* u^1.

La línea $u^1 = cte$ con u^2 variable se denomina *línea de coordenada* u^2.

Ambas familias de curvas juntas forman una red de *líneas coordenadas o curvas paramétricas* en la superficie.

Ejemplo 6.4 El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen a la ecuación

$$z = f(x, y),$$

donde $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en el abierto A, es una superficie simple, de representación paramétrica $\vec{\mathbf{x}} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$.

Ejemplo 6.5 Sea $A = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 / (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\}$ y

$$\vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = \left(u^1, u^2, +\sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}\right),$$

este es un caso particular del Ejemplo 6.4; la imagen de esta aplicación es el casquete superior de la esfera unidad.

Ejemplo 6.6 Sea $A = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 / -(\pi/2) < u^1 < (\pi/2),\ -\pi < u^2 < \pi\}$, entonces

$$\vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = (\cos u^1 \cos u^2,\ \cos u^1 \operatorname{sen} u^2,\ \operatorname{sen} u^1),$$

representa la superficie simple $\mathcal{M} = S^2$, la esfera unidad desprovista del meridiano 180° y de los polos.

Ejemplo 6.7 El conjunto de puntos $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen a la ecuación $z^2 = xy$ (cono) admite la parametrización $\vec{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = ((u^1)^2, (u^2)^2, u^1 u^2)$. No es una superficie simple, ya que $\vec{\mathbf{x}}$ no es inyectiva pues entre otros, $\vec{\mathbf{x}}(1, 2) = \vec{\mathbf{x}}(-1, -2)$. Sin embargo, si

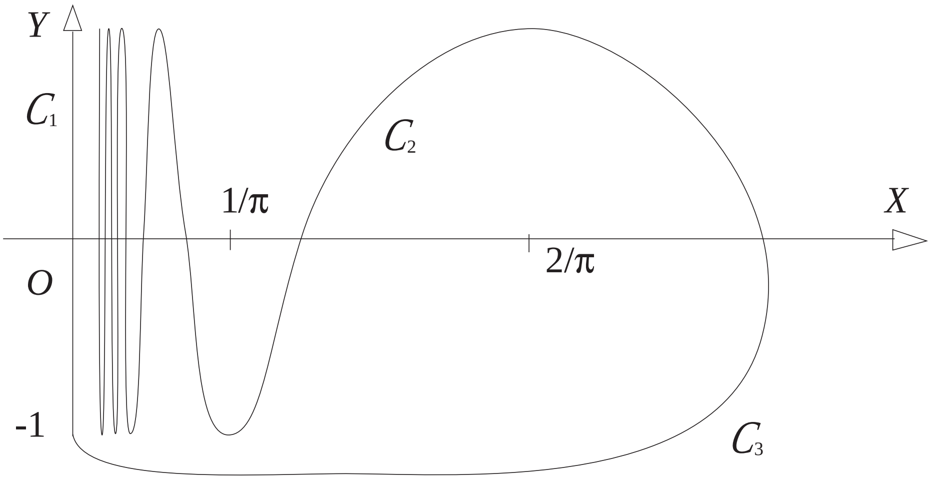
$$A = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 / u^1 > 0,\ u^2 > 0\}$$

entonces $\vec{\mathbf{x}}(A)$ es una superficie simple.

Ejemplo 6.8 El conjunto $\mathcal{M} = \mathcal{C} \times \mathbb{R}$, donde $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ es la unión de las curvas $\mathcal{C}_1$ formada por el segmento [-1,1[del eje OY,

$$\mathcal{C}_2 = \left\{(x, y) \Big/ y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad x > \frac{2}{\pi}\right\}$$

y $\mathcal{C}_3$ es una curva regular que une el punto (0,-1) con el punto ($2/\pi$,1) sin que corte a la gráfica de la curva $\mathcal{C}_2$.



La curva $\mathcal{C}$ puede parametrizarse por la longitud de arco medido a partir del punto $(0,1)$ a lo largo de $\mathcal{C}_1$, a continuación a lo largo de $\mathcal{C}_3$, desde $(0,-1)$ hasta $(2/\pi,1)$ y finalmente a lo largo de la curva $\mathcal{C}_2$, esta curva es la imagen continua e inyectiva $\vec{\alpha}$:$]0,\infty[\to I\!R^2$. $\mathcal{M}$ puede ser considerada como superficie cilíndrica formada por las perpendiculares al plano XOY pasando por los puntos de $\mathcal{C}$, su ecuación paramétrica, $\vec{\mathbf{x}}$:$]0,\infty[\times I\!R \subset I\!R^2 \to I\!R^3$, está descrita por:

$$(s,t) \mapsto \vec{\mathbf{x}}(s,t) = (\alpha^1(s), \alpha^2(s), t).$$

Se trata, pues, de una superficie simple.

Definición 6.9 *Una representación paramétrica* $\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3$, $(u^1,u^2) \mapsto \vec{\mathbf{x}}(u^1,u^2)$ *es* regular *y de clase* C^k *si* $\vec{\mathbf{x}}$ *es una aplicación de clase* C^k *y*

$$\vec{\mathbf{x}}_1(u^1,u^2) \times \vec{\mathbf{x}}_2(u^1,u^2) \neq \vec{0} \qquad \forall (u^1,u^2) \in A.$$

Donde hemos usado la notación:

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial u^1} \qquad \vec{\mathbf{x}}_2 = \frac{\partial \vec{\mathbf{x}}}{\partial u^2}.$$

Ejemplo 6.10 Si en el Ejemplo 6.4, la función f es de clase C^k la correspondiente parametrización es de clase C^k y regular.

El Ejemplo 6.5 proporciona también una parametrización de clase C^k y regular.

En el Ejemplo 6.6 se tiene una parametrización de clase C^k y

$$\begin{aligned}
&\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2 = \\
&= (-\operatorname{sen} u^1 \cos u^2, -\operatorname{sen} u^1 \operatorname{sen} u^2, \cos u^1) \times (-\cos u^1 \operatorname{sen} u^2, \cos u^1 \cos u^2, 0) = \\
&= (-\cos^2 u^1 \cos u^2, -\cos^2 u^1 \operatorname{sen} u^2, -\operatorname{sen} u^1 \cos u^1),
\end{aligned}$$

ya que $\cos u^1$ es no nulo en $]-\pi/2,\pi/2[$ y $\cos u^2$ es no nulo cuando $\operatorname{sen} u^2$ lo es, resulta que $\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2 \neq \vec{0}$ en A. Se trata de una parametrización regular. Finalmente, si consideramos la primera parte del Ejemplo 6.7, en el punto de parámetros (0,0), $\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2 = \vec{0}$. Luego no es regular en (0,0,0).

Definición 6.11 *Una* transformación de coordenadas *(o cambio de parámetros) de clase C^k es una aplicación biyectiva de clase C^k, $h : A \to B$ entre abiertos de $I\!R^2$ con inversa de clase C^k.*

Proposición 6.12 *Si $\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3$ es una representación paramétrica de una superficie simple regular de clase C^k y $h : B \to A$ una transformación de coordenadas de clase C^k, entonces $\vec{\mathbf{y}} : B \subset I\!R^2 \to I\!R^3$, $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{x}} \circ h$, define la misma superficie simple que $\vec{\mathbf{x}}$.*

Demostración.- $\vec{\mathbf{y}}$ es inyectiva pues $\vec{\mathbf{x}}$ y h son inyectivas, su clase es el mínimo de las clases de $\vec{\mathbf{x}}$ y de h; además, dada la biyectividad de h, $\vec{\mathbf{y}}(B) = \vec{\mathbf{x}}(A)$. También la representación paramétrica $\vec{\mathbf{y}} : B \subset I\!R^2 \to I\!R^3$ es regular, pues, como

$$h : B \to A, \quad (v^1, v^2) \mapsto h(v^1, v^2) = (h^1(v^1, v^2), h^2(v^1, v^2)) = (u^1, u^2)$$

tiene Jacobiano no nulo y

$$\vec{\mathbf{y}}_j = \vec{\mathbf{x}}_1 \frac{\partial h^1}{\partial v^j} + \vec{\mathbf{x}}_2 \frac{\partial h^2}{\partial v^j} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial h^i}{\partial v^j} \vec{\mathbf{x}}_i, \qquad (j = 1, 2),$$

se sigue que

$$\vec{\mathbf{y}}_1 \times \vec{\mathbf{y}}_2 = det \left(\frac{\partial h^i}{\partial v^j} \right) \vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2 \neq \vec{0}.$$

Luego, $\vec{\mathbf{y}} : B \subset I\!R^2 \to I\!R^3$ es una representación parámetrica regular de clase C^k que define la misma superficie simple que $\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3$. □

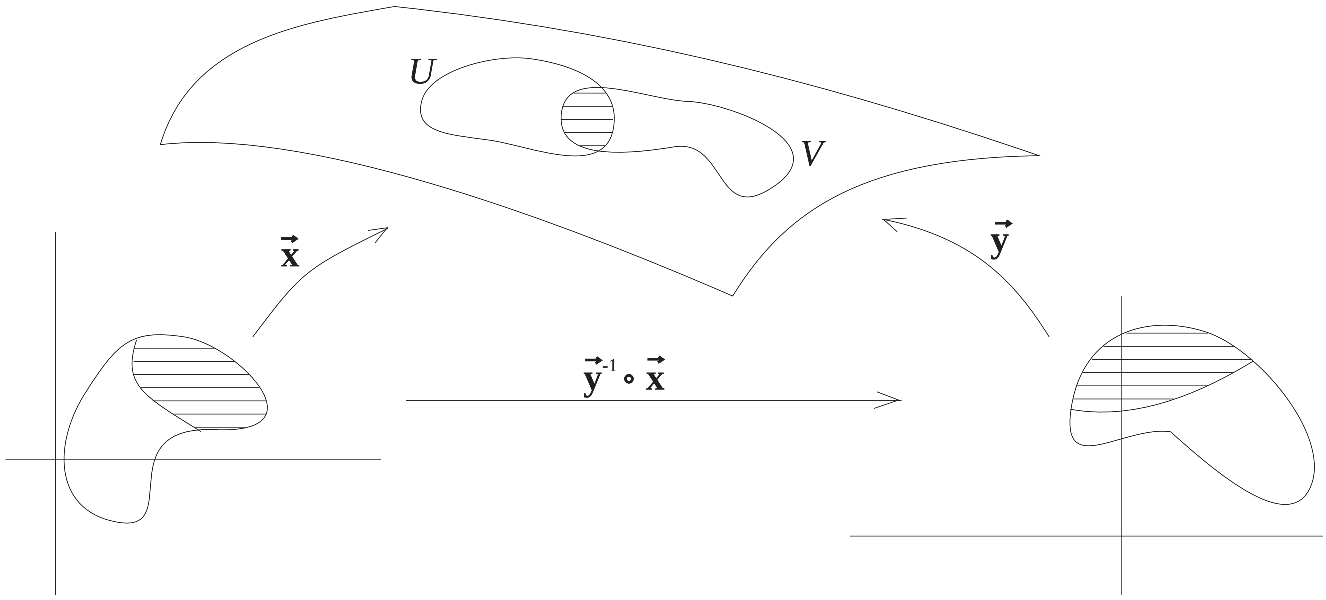
6.2 Superficies

En los ejemplos anteriores hemos dado parametrizaciones de partes de la esfera, pero ninguna describe la esfera completamente. Se hace necesario definir superficies como una colección de superficies simples que se solapen y que sobre sus intersecciones las parametrizaciones estén relacionadas por transformaciones de coordenadas diferenciables.

Definición 6.13 *Una* superficie *de clase C^k en $I\!R^3$ es un subconjunto $\mathcal{M} \subset I\!R^3$, tal que todo punto P de $\mathcal{M}$ tiene un entorno que es la imagen homeomorfa de una representación paramétrica regular de clase C^k de una superficie simple. Además, si $\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3$ e $\vec{\mathbf{y}} : B \subset I\!R^2 \to I\!R^3$ son dos de tales representaciones con $\vec{\mathbf{x}}(A) = U$ e $\vec{\mathbf{y}}(B) = V$, entonces:*

$$\vec{\mathbf{y}}^{-1} \circ \vec{\mathbf{x}} : \vec{\mathbf{x}}^{-1}(U \cap V) \subset I\!R^2 \to \vec{\mathbf{y}}^{-1}(U \cap V) \subset I\!R^2$$

es una transformación de coordenadas de clase C^k.



Nota 6.14 Al par $(U, \vec{\mathbf{x}})$ se le suele denominar carta local de la superficie.

Nota 6.15 Antes de seguir con el desarrollo de la teoría de superficies debemos precisar cual es la topología que consideraremos sobre $\mathcal{M}$, es decir, quienes son los entornos de los que se habla en la definición de superficie:

Nosotros consideraremos a lo largo de este curso solamente la topología relativa sobre $\mathcal{M}$; es decir, la inducida por la topología de $\mathbb{R}^3$. Así, la superficie simple del Ejemplo 6.8 no la consideraremos como una superficie, ya que su parametrización no es un homeomorfismo: basta considerar cualquier entorno de un punto que se proyecta sobre el eje OY.

Podríamos considerar en $\mathcal{M}$ una topología más fina que la relativa, considerando los entornos abiertos de cada punto como la componente conexa, que contiene a dicho punto, de la intersección de un abierto de $\mathbb{R}^3$ con $\mathcal{M}$; topología ésta que es equivalente a la definida en $\mathcal{M}$ de forma que las representaciones paramétricas que definen la superficie simple se conviertan en homeomorfismos. A esta topología en $\mathcal{M}$ se le denomina *topología intrínseca*. Con esta topología el Ejemplo 6.8 sí sería una superficie.

Con cualquiera de las dos topologías consideradas la definición de superficie es más restrictiva que la dada de curva, pues si la definición de ésta permite que las curvas se corten a sí mismas, sin embargo, con las superficies esto no puede ocurrir.

Ejemplo 6.16 (El plano) Usando el propio sistema de coordenadas cartesianas en el espacio, siendo el eje OZ perpendicular al plano y el origen en el plano, podemos representar el plano por las ecuaciones paramétricas

$$x = u^1, \qquad y = u^2, \qquad z = 0.$$

Otra representación es

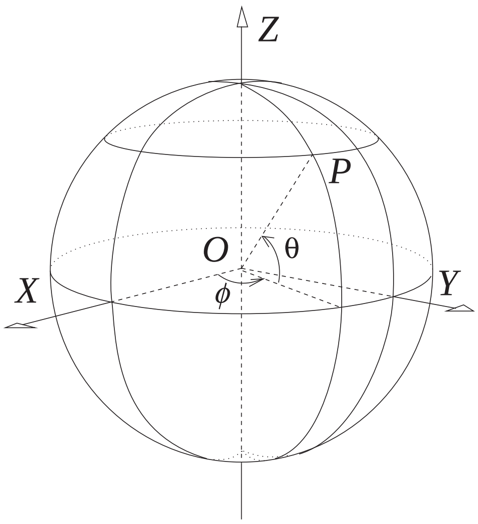
$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta, \qquad z = 0,$$

donde ρ, θ son las coordenadas polares en el plano. Esta representación no es regular en el origen, el cual corresponde a $\rho = 0$ y θ arbitrario. También si θ varía sobre toda la recta real el plano es recubierto infinidad de veces. Restringiendo esta parametrizacion a

$$\vec{\mathbf{x}} :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\subset I\!R^2 \to I\!R^3$$

se obtiene una aplicación continua e inyectiva y un homeomorfismo sobre su imagen.

Ejemplo 6.17 (Coordenadas esféricas en la esfera)



El movimiento de un punto P en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ puede ser determinado por dos coordenadas llamadas longitud ϕ y latitud θ. La longitud es el ángulo diedro orientado ϕ que forma el plano XOZ con el plano que contiene al punto P y al eje OZ. La latitud es el ángulo θ entre la recta OP y el plano XOY, con signo positivo para $z > 0$ y negativo para puntos con $z < 0$. Las dos coordenadas determinan la posición de los puntos de la esfera, pero los dos puntos $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$, llamados polos, corresponden a los valores $\theta = \pi/2$, $\theta = -\pi/2$ y a todo ϕ.

Para obtener una representación paramétrica de la esfera expresemos la proyección de los vectores $\overrightarrow{OP}$ sobre los ejes coordenados en términos de las coordenadas esféricas θ y ϕ.

Tomemos primero la proyección P_1 de P en el plano XOY. Entonces tenemos $\overline{OP_1} = a \cos\theta$.

Tomando ahora la proyección de $\overrightarrow{OP_1}$ sobre el eje OX y OY obtenemos $\overline{OA} = a \cos\theta \cos\phi$, $\overline{OB} = a \cos\theta \operatorname{sen}\phi$. La proyección de $\overrightarrow{OP}$ sobre el eje OZ es $\overline{OC} = a \operatorname{sen}\theta$. Así las ecuaciones paramétricas son:

$$x = a \cos\theta \cos\phi, \quad y = a \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \quad z = a \operatorname{sen}\theta.$$

Las componentes del vector $\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2$ (en este caso $\vec{\mathbf{x}}_\theta \times \vec{\mathbf{x}}_\phi$) están determinadas por los menores de la matriz:

$$\begin{pmatrix} -a \operatorname{sen}\theta \cos\phi & -a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi & a \cos\theta \\ -a \cos\theta \operatorname{sen}\phi & a \cos\theta \cos\phi & 0 \end{pmatrix}$$

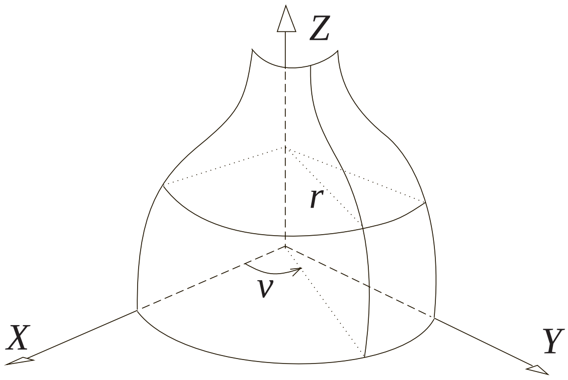
cuyo rango es 2 siempre, excepto en los polos ($\theta = \pm\pi/2$). Así tenemos la representación paramétrica:

$$\vec{\mathbf{x}}(\theta, \phi) = (a \cos\theta \cos\phi,\ a \cos\theta \operatorname{sen}\phi,\ a \operatorname{sen}\theta),$$

salvo en los polos. Ahora bien, cuando θ varía en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ y ϕ en $]-\infty, \infty[$ las imágenes de esta tira cubren a la esfera agujereada (i.e. sin sus polos) infinitas veces, y la aplicación arriba considerada es sólo un homeomorfismo local.

Las curvas $\phi = cte.$ se llaman *meridianos*, y las curvas $\theta = cte.$ se llaman *paralelos* (o circunferencias de latitud). La circunferencia $\theta = 0$ se llama también *ecuador*, éste es la única circunferencia máxima entre las circunferencias de latitud. Todos los meridianos son circunferencias máximas.

Ejemplo 6.18 (Superficies de revolución) Una superficie de revolución se obtiene girando una curva plana alrededor de un eje de revolución, quedando el plano rígidamente conectado con la curva a lo largo de toda la rotación.



Elijamos el eje OZ como eje de revolución. La intersección de la superficie de revolución con los planos pasando a través del eje se llaman *meridianos*. Ellos son curvas congruentes con la curva generatriz de la superficie. Cada uno de ellos puede ser representado por las ecuaciones paramétricas:

$$r = f(u), \qquad z = h(u),$$

que determinan la distancia r de los puntos de los meridianos al eje de revolución y la coordenada z del punto como función del parámetro u. Para un u fijo todos los puntos están en una circunferencia llamada circunferencia de latitud (o paralelo) de la superficie. Para determinar enteramente los puntos P de la superficie, necesitamos aún otro parámetro el cual pueda indicar el meridiano que pasa por P. Como tal parámetro puede ser usado el ángulo diedro orientado v entre el plano XOZ y el plano del meridiano. Entonces las coordenadas de un punto P de la superficie serán:

$$x = f(u)\cos v, \quad y = f(u)\operatorname{sen} v, \quad z = h(u).$$

Las curvas $v = cte.$ son los meridianos, las curvas $u = cte.$ son las circunferencias de latitud (paralelos).

Las ecuaciones pueden ser simplificadas si los meridianos pueden ser representados en su plano por la ecuación $z = F(r)$. Entonces:

$$x = r\,\cos v, \qquad y = r\,\operatorname{sen} v, \qquad z = F(r),$$

con parámetros r y v.

De forma análoga que en la esfera, en este caso, cuando v varía en el intervalo $]-\infty, \infty[$ la superficie es recubierta infinidad de veces.

Si la curva directriz corta al eje de revolución, dicho punto es singular (no regular).

La esfera es un caso particular de superficie de revolución.

Ejemplo 6.19 (El helicoide) Esta es una superficie formada por las perpendiculares al eje de una hélice circular pasando por los puntos de la hélice. La posición de un punto P del helicoide está determinada por dos parámetros, uno de ellos u^2, indicando el punto en la hélice en que la perpendicular que pasa por P la corta; el otro indicando la posición del punto P en la perpendicular. La ecuación paramétrica del helicoide será:

$$x = au^1\,\cos u^2, \qquad y = au^1\,\operatorname{sen} u^2, \qquad z = bu^2.$$

La correspondencia entre el plano y el helicoide es inyectiva.

Ejemplo 6.20 (El conoide) Un conoide es una superficie formada por perpendiculares a una recta, el *eje* del conoide, pasando por los puntos de una curva dada llamada *directriz* del conoide. Un helicoide es un caso particular de un conoide, la directriz es la hélice y el eje coincide con el eje de la hélice.

Las ecuaciones del conoide con eje el OZ y con directriz $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, son:

$$x = u^1 f(u^2), \qquad y = u^1 g(u^2), \qquad z = h(u^2).$$

Ecuación implícita de una superficie

Tratamos ahora de investigar cuando un conjunto de puntos, que satisfface una ecuación de la forma

$$F(x, y, z) = 0,$$

es una superficie.

Este es el caso de las ecuaciones del plano $ax + by + cz + d = 0$, de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, etc...

Bajo algunas condiciones este conjunto es una superficie, y entonces $F(x, y, z) = 0$ se denomina ecuación implícita de la superficie.

Proposición 6.21 *Si una función $F : I\!R^3 \to I\!R$ es de clase C^k $(k \geq 1)$ en un entorno de un punto (x_0, y_0, z_0) tal que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, y una de las derivadas parciales F_x, F_y, F_z es distinta de cero en este punto, entonces existe un entorno V de este punto en el espacio tal que los puntos de V que satisfacen a la ecuación*

$$F(x, y, z) = 0$$

forman una superficie simple, admitiendo una representación regular de clase C^k.

Demostración.- Sea, por ejemplo, $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Por el teorema de la función implícita, existe un entorno abierto $A \subset I\!R^2$ de (x_0, y_0) y un entorno abierto $I \subset I\!R$ de z_0, y una función $f : A \subset I\!R^2 \to I \subset I\!R$ $(x, y) \mapsto z = f(x, y)$ diferenciable de clase C^k, tal que $F(x, y, f(x, y)) = 0$.

Tenemos así una representación paramétrica de un cierto entorno de cada punto del conjunto de puntos que satisfacen a la ecuación $F(x, y, z) = 0$:

$$\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3 \qquad (u^1, u^2) \mapsto \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$$

Los vectores $\vec{\mathbf{x}}_1$, $\vec{\mathbf{x}}_2$, $\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2$ tienen por componentes:

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \vec{\mathbf{x}}_2 = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = \left(\frac{F_x}{F_z}, \frac{F_y}{F_z}, 1\right).$$

Así, $\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2 \neq \vec{0}$, y la parametrización es regular. □

6.3 Plano tangente

Plano tangente y vector normal a una superficie dada por una representación paramétrica

Definición 6.22 *Sea P un punto de una superficie $\mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^3$. Un vector $\vec{v} \in T_P(\mathbb{R}^3)$ es* tangente a $\mathcal{M}$ en P *si $\vec{v}$ es el vector tangente a alguna curva en $\mathcal{M}$.*

Proposición 6.23 *Sea $\vec{\mathbf{x}} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una representación paramétrica de una superficie $\mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^3$ y sea P un punto de $\mathcal{M}$ tal que $\overrightarrow{OP} = \vec{\mathbf{x}}(u_0^1, u_0^2)$. Un vector $\vec{v} \in T_P(\mathbb{R}^3)$ es tangente a $\mathcal{M}$ si y sólo si podemos expresar $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{\mathbf{x}}_1(u_0^1, u_0^2)$ y $\vec{\mathbf{x}}_2(u_0^1, u_0^2)$.*

Demostración.- Las curvas paramétricas son curvas en $\mathcal{M}$, así $\vec{\mathbf{x}}_1(u_0^1, u_0^2)$ y $\vec{\mathbf{x}}_2(u_0^1, u_0^2)$ son tangentes a $\mathcal{M}$ en P.

Supongamos que $\vec{v} \in T_P(\mathbb{R}^3)$ es tangente a $\mathcal{M}$, existe una curva $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ en $\mathcal{M}$ tal que $\vec{\alpha}(0) = \overrightarrow{OP}$ y $\vec{\alpha}\,'(0) = \vec{v}$.

Podemos expresar $\vec{\alpha}(t) = \vec{\mathbf{x}}(a^1(t), a^2(t))$ para a^1, a^2, funciones diferenciables, luego como

$$\vec{\alpha}\,'(t) = \vec{\mathbf{x}}_1(a^1(t), a^2(t))\frac{da^1}{dt} + \vec{\mathbf{x}}_2(a^1(t), a^2(t))\frac{da^2}{dt},$$

resulta que

$$\overrightarrow{OP} = \vec{\alpha}(0) = \vec{\mathbf{x}}(u_0^1, u_0^2) \Rightarrow a^1(0) = u_0^1, \quad a^2(0) = u_0^2,$$

$$\vec{v} = \vec{\alpha}\,'(0) = \frac{da^1}{dt}(0)\vec{\mathbf{x}}_1(u_0^1, u_0^2) + \frac{da^2}{dt}(0)\vec{\mathbf{x}}_2(u_0^1, u_0^2).$$

Supongamos, recíprocamente, que se puede expresar un vector tangente como

$$\vec{v} = c^1\,\vec{\mathbf{x}}_1(u_0^1, u_0^2) + c^2\,\vec{\mathbf{x}}_2(u_0^1, u_0^2).$$

Entonces la curva definida, en un conveniente intervalo, por

$$\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3 \quad t \in I \mapsto \vec{\alpha}(t) = \vec{\mathbf{x}}(u_0^1 + c^1 t, u_0^2 + c^2 t),$$

está en la superficie, y se verifica: $\vec{\alpha}\,'(0) = \vec{v}$. Luego, $\vec{v}$ es tangente a $\mathcal{M}$ en P. □

Definición 6.24 *Se llama* plano tangente *a $\mathcal{M}$ en P al conjunto de todos los vectores tangentes a $\mathcal{M}$ en P (se denota por $T_P(\mathcal{M})$).*

Definición 6.25 *La recta que pasa por un punto P de una superficie y es perpendicular al plano tangente se llama* normal *a la superficie en el punto P. A cualquier vector de esta recta se llama* vector normal *en P.*

Ecuación del plano tangente en coordenadas

Sea la superficie, de ecuación paramétrica $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$, de componentes

$$x = x(u^1, u^2), \qquad y = y(u^1, u^2), \qquad z = z(u^1, u^2).$$

Entonces la ecuación del plano tangente, al estar generado por $\vec{\mathbf{x}}_1$ y $\vec{\mathbf{x}}_2$, es:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

donde X, Y, Z son las coordenadas de un punto genérico del plano tangente en el punto (x, y, z), y los subíndices indican derivadas parciales.

Plano tangente a una superficie dada en forma implícita

Proposición 6.26 *La superficie $F(x, y, z) = 0$ de clase C^1 tiene un plano tangente en todo punto regular (x, y, z), y su ecuación es:*

$$F_x(X - x) + F_y(Y - y) + F_z(Z - z) = 0.$$

Demostración.- Si suponemos, para fijar ideas, que $F_z \neq 0$ en el punto de contacto, entonces la superficie puede ser localmente representada por la ecuación $z = f(x, y)$, la cual es un caso particular de ecuación paramétrica, con x e y como parámetros. Entonces, (ver demostración de la Proposición 6.21)

$$\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2 = \Big(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \Big) = \Big(\frac{F_x}{F_z}, \frac{F_y}{F_z}, 1 \Big).$$

Lo cual significa que el vector de componentes

$$(F_x,\ F_y,\ F_z)$$

es también un vector normal a la superficie. Así se obtiene la ecuación del plano tangente del enunciado. □

6.4 Orientación de una superficie

Sea E un espacio vectorial real de dimensión n y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ dos *bases ordenadas* de E y sea la matriz cambio de base (a^i_j) definida por

$$\vec{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a^i_j \vec{u}_i.$$

Definición 6.27 *Las bases ordenadas* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ *y* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *dan la* misma orientación *a* E *si* $det(a^i_j) > 0$*. Y dan* orientación opuesta *si* $det(a^i_j) < 0$.

La orientación en un punto P de una superficie es la inducida por la elección de la normal a la superficie según la orientación dada en el plano tangente en P.

En un entorno suficientemente pequeño de un punto regular se puede extender la elección de una orientación. Pero no es siempre cierto para toda la superficie.

Existen casos, como la esfera, en que es posible elegir un vector normal de forma continua, para otras superficies esto no es posible (superficie *no orientable* o de *una sola cara*), por ejemplo la banda de Möbius.

De forma más precisa podemos dar la siguiente definición de orientabilidad:

Definición 6.28 *Una superficie* $\mathcal{M}$ *es* orientable *si la aplicación* $\nu : \mathcal{M} \to S^2$ *con* $\nu(P)$ *vector normal unitario a* $\mathcal{M}$ *en* $P \in \mathcal{M}$*, es continua.*

Relación entre orientación y parametrización

Toda parametrización induce una orientación dada por la elección de

$$\vec{\mathbf{N}} = \frac{\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2}{|\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2|}.$$

En un dominio sin puntos singulares, $\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{N}}(u^1, u^2)$ es una función continua, de hecho, una función de clase C^{k-1}, si la parametrización es de clase C^k, y así la orientación se establece en todo el dominio. Si cambiamos a otras coordenadas curvilíneas $(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ por las fórmulas

$$u^1 = u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), \quad u^2 = u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2),$$

tenemos la nueva representación paramétrica $\vec{\mathbf{y}}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = \vec{\mathbf{x}}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2))$ y resulta

$$\vec{\mathbf{y}}_1 \times \vec{\mathbf{y}}_2 = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} \vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2$$

y para el correspondiente vector unitario obtenemos:

$$\vec{\mathbf{N}}\,' = \epsilon \vec{\mathbf{N}} \qquad \epsilon = sign\left|\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}\right|.$$

Así la orientación inducida por la nueva parametrización es la misma si el Jacobiano de la transformación de coordenadas es positivo, y cambia a la opuesta si el Jacobiano es negativo.

Utilizando este hecho, podemos dar la siguiente definición intrínseca de orientación de superficies

Definición 6.29 *Dar una* orientación *en una superficie es dar un conjunto de cartas locales que recubran toda la superficie y tal que las transformaciones de coordenadas, allí donde estén definidas, tengan Jacobiano positivo.*

Ejemplos

Ejemplo 6.30 *Sea $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ una representación paramétrica de una superficie $\mathcal{M}$ y $\mathcal{F}$ una familia de rectas que pasan por cada punto de $\mathcal{M}$, de vector director unitario $\vec{a} = \vec{a}(u^1, u^2)$. Entonces la condición necesaria y suficiente para que exista una superficie que tenga por vectores normales a los de dirección de la familia de rectas $\mathcal{F}$, es que se verifique la identidad:*

$$\frac{\partial}{\partial u^2}(\vec{a} \cdot \vec{\mathbf{x}}_1) = \frac{\partial}{\partial u^1}(\vec{a} \cdot \vec{\mathbf{x}}_2).$$

Demos una representación paramétrica de la superficie a encontrar por

$$\vec{\mathbf{y}}(u^1, u^2) = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) + \lambda(u^1, u^2)\vec{a}(u^1, u^2).$$

Así, se tiene, $\vec{\mathbf{y}}_1 = \vec{\mathbf{x}}_1 + \lambda_1 \vec{a} + \lambda \vec{a}_1$ e $\vec{\mathbf{y}}_2 = \vec{\mathbf{x}}_2 + \lambda_2 \vec{a} + \lambda \vec{a}_2$.

Luego para que exista tal superficie se debe verificar que $\vec{\mathbf{y}}_1 \times \vec{\mathbf{y}}_2$ sea paralelo a $\vec{a}$; lo que es equivalente a que $\vec{\mathbf{y}}_1 \cdot \vec{a} = 0$ e $\vec{\mathbf{y}}_2 \cdot \vec{a} = 0$; esto es $\vec{\mathbf{x}}_1 \cdot \vec{a} + \lambda_1 = 0$ y $\vec{\mathbf{x}}_2 \cdot \vec{a} + \lambda_2 = 0$.

Con lo que tenemos la siguiente ecuación diferencial exacta

$$d\lambda = -\vec{\mathbf{x}}_1 \cdot \vec{a}\, du^1 - \vec{\mathbf{x}}_2 \cdot \vec{a}\, du^2.$$

Cuya condición necesaria y suficiente de integrabilidad es la del enunciado.

Ejemplo 6.31 *¿Para qué valores de a, los puntos que satisfacen a la ecuación $F(x, y, z) = z(z-2) + xy - a = 0$ constituyen una superficie regular?*

Como $F_x(x, y, z) = y$, para los puntos en que $y \neq 0$, aplicando el teorema de la función implícita, existe una carta local (carta de Monge) de la forma $\vec{\mathbf{x}}(u, v) = (f(u, v), u, v)$.

Para hacer el estudio en los puntos de la superficie que quedan en el plano $y = 0$, nos fijamos en $F_z(x, y, z) = 2z - 2$; y podemos garantizar que en los puntos que verifican $y = 0$, $z \neq 1$, existe una carta de la forma $\vec{\mathbf{x}}(u, v) = (u, v, g(u, v))$.

Finalmente, para los puntos de la superficie que quedan en la recta $y = 0$, $z = 1$, acudimos a $F_y(x, y, z) = x$; con lo que en los puntos que verifican $y = 0$, $z = 1$, $x \neq 0$, existen cartas de la forma $\vec{\mathbf{x}}(u, v) = (u, h(u, v), v)$.

Por lo que el único punto donde no existiría una carta local es en el $(0, 0, 1)$. Basta pues elegir el valor de a conveniente para que la superficie correspondiente no pase por dicho punto. Así, si $x = 0$, $y = 0$, basta elegir a de tal forma que $z \neq 1$:

$$z(z-2) = a; \quad z = 1 \pm \sqrt{1+a}; \quad 1 = 1 \pm \sqrt{1+a}.$$

Luego, $a \neq -1$, la ecuación $F(x, y, z) = z(z-2) + xy - a = 0$, representa una superficie regular.

Los puntos que satisfacen a la ecuación dada representa una cuádrica no degenerada para $a \neq -1$ y, por tanto, una superficie regular; para $a = -1$ se trata de un cono cuyo vértice $(0, 0, 1)$ es un punto singular.

TEMA VII

Envolvente de una familia de superficies

7.1 Envolvente de una familia uniparamétrica de superficies

Consideremos una familia uniparamétrica de superficies $\{\mathcal{M}\}_{\lambda\in I}$

$$F(x, y, z, \lambda) = 0 \tag{7.1}$$

de clase C^1 (cada superficie de clase C^1) y supongamos que la función tiene también derivadas continuas respecto a λ.

Supongamos que $F(x, y, z, \lambda) = 0$ representa una superficie para cada λ; si $F_\lambda \neq 0$ en alguna superficie de la familia correspondiente al valor λ_0 del parámetro, entonces $F(x, y, z, \lambda) = 0$ representará diferentes superficies para valores diferentes de λ en algún entorno de λ_0, pues, entonces F no será una función constante de λ.

Definición 7.1 *La* envolvente *de una familia $\{\mathcal{M}_\lambda\}_{\lambda\in I}$ uniparamétrica de superficies de ecuación $F(x, y, z, \lambda) = 0$ es una superficie $\mathcal{E}$ que es tangente en cada uno de sus puntos a una superficie de la familia y, además, en todo entorno del punto de contacto con una superficie de la familia existen puntos de contacto con otras superficies de la familia.*

Nota 7.2 Lo último que se requiere significa que la envolvente no puede coincidir con una de las superficies de la familia en un entorno abierto.

Proposición 7.3 *Los puntos de la envolvente de la familia de superficies (7.1) satisfacen a las ecuaciones:*

$$F(x, y, z, \lambda) = 0, \qquad F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0.$$

Estas ecuaciones son también satisfechas por los puntos singulares de las superficies de la familia, incluso si estos puntos no pertenecen a la envolvente.

Demostración.- Supongamos que la familia dada tiene una envolvente que es una superficie regular, y que dicha envolvente está representada localmente por una ecuación paramétrica
$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2).$$

A todo punto de la envolvente, con coordenadas curvilíneas (u^1, u^2), le corresponde una superficie de la familia $\{\mathcal{M}\}_{\lambda\in I}$ que es tangente a la envolvente en este punto; a través de esta correspondencia, λ viene a ser una función de u^1, u^2, es decir $\lambda = \lambda(u^1, u^2)$. Supongamos además que existe una representación paramétrica de la envolvente tal que λ sea una función de clase C^1.

Puesto que el punto (u^1, u^2) de la envolvente es el punto de contacto con la superficie de la familia que corresponde al valor $\lambda(u^1, u^2)$ del parámetro, tenemos la identidad:
$$F(x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2), \lambda(u^1, u^2)) = 0.$$

Derivando esta identidad respecto a u^1, u^2, obtenemos:

$$\begin{aligned} F_x\, x_1 + F_y\, y_1 + F_z\, z_1 + F_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u^1} &= 0 \\ F_x\, x_2 + F_y\, y_2 + F_z\, z_2 + F_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Ya que la envolvente y la superficie son tangentes, tienen el mismo plano tangente; por tanto el vector de componentes
$$(F_x,\ F_y,\ F_z)$$
normal a la superficie de la familia será perpendicular a los vectores $\vec{\mathbf{x}}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{\mathbf{x}}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ que son tangentes a la envolvente. Así:

$$\begin{aligned} F_x\, x_1 + F_y\, y_1 + F_z\, z_1 &= 0 \\ F_x\, x_2 + F_y\, y_2 + F_z\, z_2 &= 0. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Y de estas ecuaciones y de las (7.2) resulta que

$$F_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u^1} = 0, \qquad F_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u^2} = 0.$$

Pero, por nuestra suposición, $\partial\lambda/\partial u^1$ y $\partial\lambda/\partial u^2$ no pueden ser simultáneamente nulas; así tenemos en los puntos de la envolvente:

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0,$$

la cual, junto con la ecuación de la familia (7.1), da las ecuaciones del enunciado a las que satisfacen los puntos de la envolvente, con lo que se prueba la primera parte.

Por otra parte, los puntos singulares de la superficie de la familia verifican $F_x = F_y = F_z = 0$, pues en ellos el vector normal es nulo. Por tanto, cumplen (7.3) y, en consecuencia, usando como antes las (7.2), satisfacen las ecuaciones del enunciado.

Además, si los puntos que verifican $F = 0$, $F_\lambda = 0$ y no son puntos singulares de la familia forman una superficie, ésta es tangente a la superficie correspondiente de la familia y, por tanto, es la envolvente; pues, la ecuación (7.3) se verifica. □

Nota 7.4 La función $\lambda = \lambda(u^1, u^2)$ depende de la parametrización que haya sido elegida para la envolvente, y no se conoce previamente. Para hallar, en la práctica, la envolvente se procede como sigue: de las ecuaciones

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= 0 \\ F_\lambda(x, y, z, \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

o bien se elimina λ entre ellas y se obtiene una ecuación implícita, o bien se expresan x, y, z, λ como funciones de dos parámetros (uno de los cuales puede ser λ) y se obtienen ecuaciones paramétricas. La ecuación resultante representará la ecuación de la envolvente y los puntos singulares (de las superficies de la familia) y así, con un cálculo posterior se determina qué parte es la envolvente.

Nota 7.5 Para un valor fijo λ_0, las ecuaciones

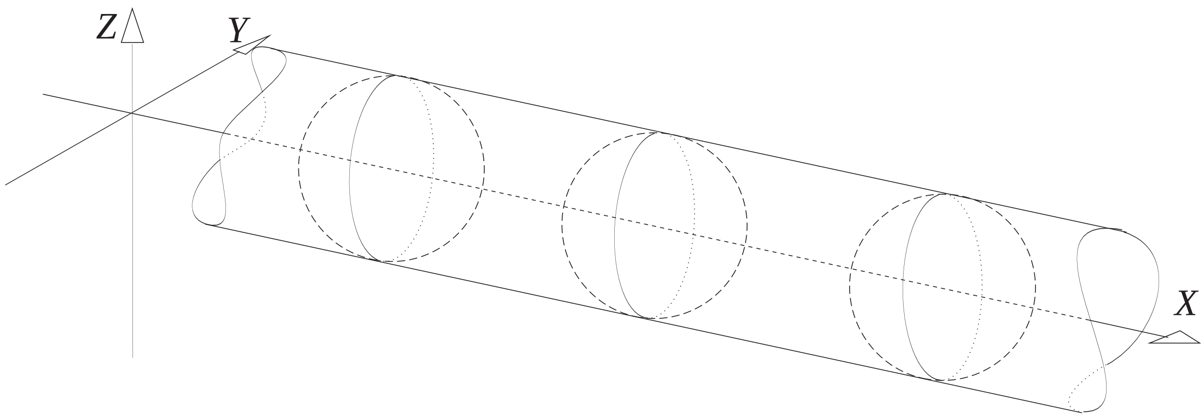
$$F(x, y, z, \lambda_0) = 0, \qquad F_\lambda(x, y, z, \lambda_0) = 0,$$

representan (salvo singularidades) una curva sobre la superficie de la familia que corresponde a este valor del parámetro. Esta curva, si no es una curva de puntos singulares, también está sobre la envolvente, y la supeficie de la familia y la envolvente son tangentes a lo largo de ella. Tales curvas se llaman curvas características de la familia. Su unión, cuando λ varía, constituye la envolvente.

Ejemplo 7.6 Sea la familia de esferas de centro en el eje OX y radio 1:

$$(x - \lambda)^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= (x - \lambda)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ F_\lambda(x, y, z, \lambda) &= -2(x - \lambda) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y^2 + z^2 = 1 \qquad \textit{Envolvente}$$



esta envolvente es tangente a cada una de las superficies M_λ de la familia, es decir, a cada una de las esferas a lo largo de las circunferencias

$$x = \lambda, \qquad y^2 + z^2 = 1 \qquad \textit{Curvas características}$$

Envolvente de una familia uniparamétrica de superficies dadas en forma paramétrica

Si las superficies de la familia están dadas en la forma

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2, \lambda),$$

donde u^1, u^2 son las coordenadas curvilíneas de las superficies y λ es el parámetro de la familia, y si suponemos que $\vec{\mathbf{x}}$ es de clase C^1 respecto a u^1, u^2, λ y que $\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2 \neq \vec{0}$ (no existen puntos singulares), tenemos:

Proposición 7.7 *Una condición necesaria para que exista envolvente de la familia de superficies* $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2, \lambda)$ *es que* $[\vec{\mathbf{x}}_1 \;\; \vec{\mathbf{x}}_2 \;\; \vec{\mathbf{x}}_\lambda] = 0$.

Nota 7.8 La envolvente deberá satisfacer pues al sistema formado por

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2, \lambda), \qquad [\vec{\mathbf{x}}_1 \;\; \vec{\mathbf{x}}_2 \;\; \vec{\mathbf{x}}_\lambda] = 0.$$

La ecuación de la misma se obtendrá eliminando u^1, u^2, λ entre las ecuaciones

$$x = x(u^1, u^2, \lambda), \qquad y = y(u^1, u^2, \lambda), \qquad z = z(u^1, u^2, \lambda), \qquad [\vec{\mathbf{x}}_1 \;\; \vec{\mathbf{x}}_2 \;\; \vec{\mathbf{x}}_\lambda] = 0.$$

Demostración.- Procediendo de forma análoga al caso en que la familia de superficies viene dada en forma implícita. Sea $\lambda = \lambda(u^1, u^2)$ la función que determina la correspondencia entre los puntos de la envolvente y parámetros de la familia, que suponemos de clase C^1 y $\partial\lambda/\partial u^1$, $\partial\lambda/\partial u^2$ no simultáneamente nulas.

La envolvente o lugar de puntos de tangencia, se obtiene sustituyendo $\lambda = \lambda(u^1, u^2)$ en $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2, \lambda)$; tendremos:

$$\mathcal{E}: \qquad \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2, \lambda(u^1, u^2))$$

El vector normal a la superficie de la familia $\mathcal{M}_\lambda$, vendrá dado por $\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2$

El plano tangente a $\mathcal{E}$ vendrá determinado por los vectores

$$\vec{\mathbf{x}}_1 + \vec{\mathbf{x}}_\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial u^1}, \qquad \vec{\mathbf{x}}_2 + \vec{\mathbf{x}}_\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial u^2}$$

En el punto de tangencia, al coincidir el plano tangente a $\mathcal{M}_\lambda$ y a $\mathcal{E}$, resulta:

$$(\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2) \cdot (\vec{\mathbf{x}}_1 + \vec{\mathbf{x}}_\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial u^1}) = 0, \qquad (\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2) \cdot (\vec{\mathbf{x}}_2 + \vec{\mathbf{x}}_\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial u^2}) = 0,$$

que equivalen respectivamente a

$$[\vec{\mathbf{x}}_1 \;\; \vec{\mathbf{x}}_2 \;\; \vec{\mathbf{x}}_\lambda] \frac{\partial\lambda}{\partial u^1} = 0, \qquad [\vec{\mathbf{x}}_1 \;\; \vec{\mathbf{x}}_2 \;\; \vec{\mathbf{x}}_\lambda] \frac{\partial\lambda}{\partial u^2} = 0$$

Por lo que, al no ser nulas simultáneamente $\partial\lambda/\partial u^1$ y $\partial\lambda/\partial u^2$, resulta que

$$[\vec{\mathbf{x}}_1 \;\; \vec{\mathbf{x}}_2 \;\; \vec{\mathbf{x}}_\lambda] = 0.$$

□

Ejemplo 7.9 Si la familia de superficies viene dada por $z = f(x, y, \lambda)$:

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(x, y, \lambda) = (x, y, f(x, y, \lambda)),$$

la condición necesaria de la envolvente, será

$$[\vec{\mathbf{x}}_1 \ \ \vec{\mathbf{x}}_2 \ \ \vec{\mathbf{x}}_\lambda] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = 0,$$

es decir:

$$f_\lambda = 0.$$

7.2 Envolvente de una familia uniparamétrica de planos

Una familia uniparamétrica de planos está representada por la ecuación

$$\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{N}}(u) = f(u),$$

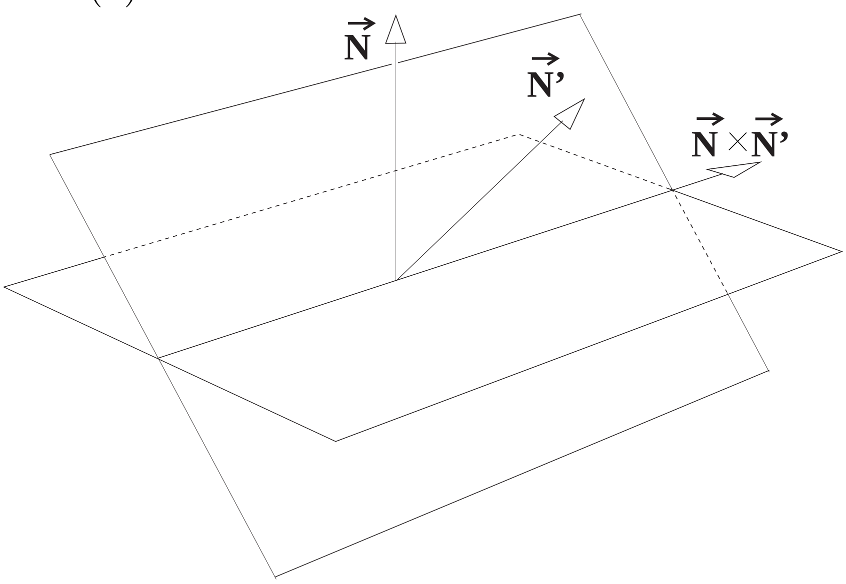
donde $\vec{\mathbf{N}}(u)$ es un vector normal al plano que corresponde al valor u del parámetro. Es claro que como todas las superficies de la familia son planos, no tienen puntos singulares.

Las líneas características de la familia $\mathcal{C}_u$ satisfacen a las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{N}}(u) &= f(u) \\ \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{N}}\,'(u) &= f\,'(u) \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

Excepto en el caso de que la familia conste de planos paralelos (esto es, si $\vec{\mathbf{N}}(u) =$ *cte.* y $\vec{\mathbf{N}}\,'(u) = 0$), los vectores $\vec{\mathbf{N}}(u)$ y $\vec{\mathbf{N}}\,'(u)$ no son colineales (excepto para valores excepcionales de u), y por tanto las curvas características $\mathcal{C}_u$ de la familia son rectas definidas por las ecuaciones lineales (7.4)

El vector dirección de las curvas características $\mathcal{C}_u$ (vector dirección de cada recta) es $\vec{\mathbf{N}}(u) \times \vec{\mathbf{N}}\,'(u)$.



Así la recta característica en el plano que corresponde al valor u del parámetro, $\mathcal{C}_u$, tiene ecuación paramétrica de la forma

$$\overrightarrow{\alpha} : I\!R \to I\!R^3$$

$$v \mapsto \vec{\alpha}(v) = \vec{\beta}(u) + v\vec{\mathbf{N}}(u) \times \vec{\mathbf{N}}\,'(u)$$

donde v es el parámetro de la recta, y $\vec{\beta}(u)$ es un punto arbitrario elegido en la recta característica $\mathcal{C}_u$.

Si escogemos puntos $\vec{\beta}(u)$ solución de las ecuaciones (7.4) tales que la aplicación $\overrightarrow{\beta} : I\!R \to I\!R^3$ defina una curva diferenciable, y consideramos u y v como parámetros independientes de una representación paramétrica de una superficie, entonces la ecuación

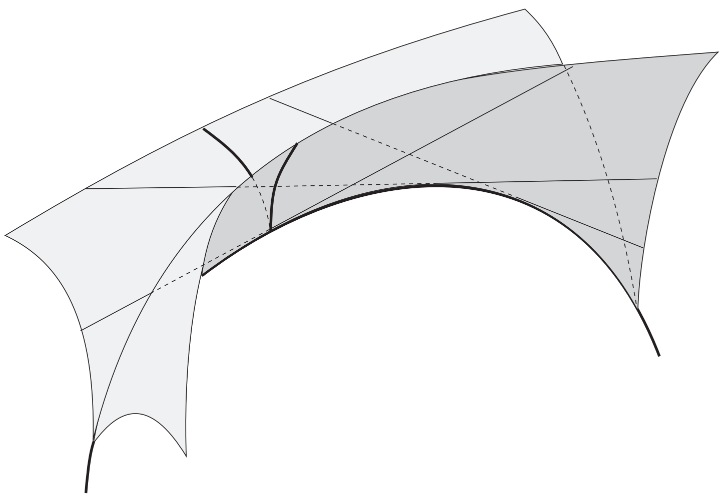
$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u, v) = \vec{\beta}(u) + v\,\vec{\mathbf{N}}(u) \times \vec{\mathbf{N}}\,'(u),$$

es una ecuación paramétrica de la superficie envolvente. Esta envolvente está generada por rectas que están enteramente contenidas en la superficie (las curvas características).

Damos a continuación una proposición que nos indica la configuración de los distintos tipos de envolventes de una familia uniparamétrica de planos.

Proposición 7.10 *Sea la familia de planos* $\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{N}}(u) = f(u)$, *no paralelos y las aplicaciones* $\vec{\mathbf{N}}$ *y* f *de clase* C^2.

1. *Si* $[\vec{\mathbf{N}}(u)\ \vec{\mathbf{N}}\,'(u)\ \vec{\mathbf{N}}\,''(u)] \neq 0$, *entonces la envolvente de la familia de planos es una superficie de uno de los tipos siguientes:*
   - *(a) Una superficie engendrada por las tangentes a una curva alabeada* (Superficie tangente).
   - *(b) Una* superficie cónica, *es decir una superficie engendrada por las rectas que pasan por un punto fijo del espacio (llamado vértice del cono) y por puntos de alguna curva (llamada directriz de la superficie cónica).*
2. *Si* $[\vec{\mathbf{N}}(u)\ \vec{\mathbf{N}}\,'(u)\ \vec{\mathbf{N}}\,''(u)] = 0$, *entonces la envolvente es una* superficie cilíndrica, *es decir en la que los generadores rectilíneos son paralelos entre sí.*



Demostración.- Se trata de encontrar una curva para la cual todas las curvas características son tangentes. Tal curva, si existe, se denomina arista de retroceso de la envolvente.

Usaremos el parámetro u de la familia como parámetro de la arista de retroceso y asignaremos al valor u el punto de contacto de la arista de retroceso con la curva (recta) característica que corresponde a u.

Supongamos que la ecuación paramétrica obtenida de esta forma sea
$$\vec{\gamma} : I\!R \to I\!R^3 \qquad u \mapsto \vec{\gamma}(u),$$
y que $\vec{\gamma}$ sea de clase C^1. Ya que para todo u estos puntos quedan en la correspondiente recta característica, las ecuaciones (7.4) se satisfacen idénticamente:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(u) \cdot \vec{\mathbf{N}}(u) &= f(u) \\ \vec{\gamma}(u) \cdot \vec{\mathbf{N}}\,'(u) &= f\,'(u) \end{aligned}$$

Derivando la última identidad, obtenemos
$$\vec{\gamma}\,'(u) \cdot \vec{\mathbf{N}}\,'(u) + \vec{\gamma}(u) \cdot \vec{\mathbf{N}}\,''(u) = f\,''(u)$$
y como las rectas caraterísticas deben ser tangentes a la arista de retroceso, resulta que $\vec{\gamma}\,'(u)$ es paralelo a $\vec{\mathbf{N}}(u) \times \vec{\mathbf{N}}\,'(u)$, es decir $\vec{\gamma}\,'(u) \cdot \vec{\mathbf{N}}\,'(u) = 0$.

Así, la arista de retroceso deberá satisfacer al sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(u) \cdot \vec{\mathbf{N}}(u) &= f(u) \\ \vec{\gamma}(u) \cdot \vec{\mathbf{N}}\,'(u) &= f\,'(u) \\ \vec{\gamma}(u) \cdot \vec{\mathbf{N}}\,''(u) &= f\,''(u) \end{aligned}$$

Si $[\vec{\mathbf{N}}(u) \;\; \vec{\mathbf{N}}\,'(u) \;\; \vec{\mathbf{N}}\,''(u)] \neq 0$, es decir, el determinante de los coeficientes de este sistema de ecuaciones lineales es no nulo, podemos obtener, como solución única, $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(u)$.

Si la solución del sistema $\vec{\gamma}(u)$ es constante, entonces todas las rectas características pasan por un punto del espacio y la envolvente es una superficie cónica.

Si la solución es no constante en algún intervalo, entonces $\vec{\gamma}\,'(u) \neq \vec{0}$, excepto para algunos puntos aislados, y se comprueba inmediatamente, sin más que seguir nuestro razonamiento en sentido inverso, que las rectas características son tangentes a la curva $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(u)$.

Por último, si $[\vec{\mathbf{N}}(u) \;\; \vec{\mathbf{N}}\,'(u) \;\; \vec{\mathbf{N}}\,''(u)] = 0$, pero $\vec{\mathbf{N}}(u) \times \vec{\mathbf{N}}\,'(u) \neq \vec{0}$, entonces son paralelos los $\vec{\mathbf{N}}(u) \times \vec{\mathbf{N}}\,'(u)$ (Ver la Nota 7.11 siguiente), lo que significa que las rectas características son todas paralelas y la envolvente es una superficie cilíndrica.
□

Nota 7.11 *"Sea $\vec{\mathbf{N}}(t)$ un campo de vectores dependientes de un parámetro t y supongamos que $[\vec{\mathbf{N}}(t) \;\; \vec{\mathbf{N}}\,'(t) \;\; \vec{\mathbf{N}}\,''(t)] = 0$ y $\vec{\mathbf{N}}(t) \times \vec{\mathbf{N}}\,'(t) \neq \vec{0}$, entonces $\vec{\mathbf{N}}(t) \times \vec{\mathbf{N}}\,'(t)$ tienen todos la misma dirección".*

Ponemos

$$\vec{\mathbf{M}}(t) = \frac{\vec{\mathbf{N}}(t) \times \vec{\mathbf{N}}\,'(t)}{\|\vec{\mathbf{N}}(t) \times \vec{\mathbf{N}}\,'(t)\|} \neq \vec{0}.$$

Entonces, $\vec{\mathbf{M}}(t)$ es perpendicular a los campos coplanarios $\vec{\mathbf{N}}(t), \vec{\mathbf{N}}'(t), \vec{\mathbf{N}}''(t)$; con lo que tenemos las identidades

$$\vec{\mathbf{M}}(t) \cdot \vec{\mathbf{N}}(t) = 0 \qquad \vec{\mathbf{M}}(t) \cdot \vec{\mathbf{N}}\,'(t) = 0 \qquad \vec{\mathbf{M}}(t) \cdot \vec{\mathbf{N}}\,''(t) = 0.$$

Derivando estas dos identidades primeras, resulta entonces que $\vec{\mathbf{M}}\,'(t)\cdot\vec{\mathbf{N}}(t)=0$ y $\vec{\mathbf{M}}\,'(t)\cdot\vec{\mathbf{N}}\,'(t)=0$.

Por otra parte, al ser $\|\vec{\mathbf{M}}(t)\|=1$, $\vec{\mathbf{M}}(t)\cdot\vec{\mathbf{M}}(t)=cte. \Rightarrow \vec{\mathbf{M}}\,'(t)\cdot\vec{\mathbf{M}}(t)=0$. Por lo que se deduce que $\vec{\mathbf{M}}\,'(t)=0$, puesto que $\{\vec{\mathbf{N}},\vec{\mathbf{N}}\,',\vec{\mathbf{M}}\}$ son linealmente independientes para cada t y $\vec{\mathbf{M}}\,'(t)$ es ortogonal a los tres. Por tanto $\vec{\mathbf{M}}(t)=\vec{\mathbf{a}}$, vector constante, de donde

$$\vec{\mathbf{N}}(t)\times\vec{\mathbf{N}}\,'(t)=\|\vec{\mathbf{N}}(t)\times\vec{\mathbf{N}}\,'(t)\|\vec{\mathbf{a}}.$$

Luego $\vec{\mathbf{N}}(t)\times\vec{\mathbf{N}}\,'(t)$ tienen todos la misma dirección. □

7.3 Envolvente de familias biparamétricas de superficies

Definición 7.12 *Una* envolvente *de la familia de superficies $F(x,y,z,\lambda,\mu)=0$, donde F es una función de clase C^1 y F_λ, F_μ no son idénticamente nulas en cualquier abierto, es una superficie tal que en cada uno de sus puntos es tangente a una de las superficies de la familia, y además, en todo entorno de un punto de contacto con una superficie de la familia existen puntos de contactos con otras superficies.*

Proposición 7.13 *Sea $F(x,y,z,\lambda,\mu)=0$ la ecuación de una familia biparamétrica de superficies, entonces las coordenadas de los puntos de la envolvente satisfacen a las ecuaciones:*

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=0,\qquad F_\lambda(x,y,z,\lambda,\mu)=0,\qquad F_\mu(x,y,z,\lambda,\mu)=0.$$

Este sistema de ecuaciones es también satisfecho por los puntos singulares de la familia.

Demostración.- Supongamos que la envolvente puede ser representada por una ecuación paramétrica de clase C^1, $\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{x}}(u^1,u^2)$ tal que los parámetros $\lambda=\lambda(u^1,u^2)$, $\mu=\mu(u^1,u^2)$ de la superficie que es tangente en el punto (u^1,u^2) son funciones de clase C^1 y el Jacobiano

$$\frac{\partial(\lambda,\mu)}{\partial(u^1,u^2)}\neq 0.$$

Ya que el punto (u^1,u^2) es el de contacto de la envolvente y la superficie de la familia que corresponde a los valores de los parámetros $\lambda(u^1,u^2)$, $\mu(u^1,u^2)$, tenemos idénticamente:

$$F(x(u^1,u^2),y(u^1,u^2),z(u^1,u^2),\lambda(u^1,u^2),\mu(u^1,u^2))=0.$$

Derivando respecto a u^1 y u^2, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} F_x\, x_1 + F_y\, y_1 + F_z\, z_1 + F_\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial u^1} + F_\mu \frac{\partial\mu}{\partial u^1} = 0 \\ F_x\, x_2 + F_y\, y_2 + F_z\, z_2 + F_\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial u^2} + F_\mu \frac{\partial\mu}{\partial u^2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

La envolvente y la correspondiente superficie de la familia tienen el mismo plano tangente en el punto común. Los vectores $\vec{\mathbf{x}}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{\mathbf{x}}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ son tangentes a la envolvente, mientras que el vector $\vec{\mathbf{N}} = (F_x, F_y, F_z)$ es normal a la superficie de la familia. Por tanto tenemos:

$$\left.\begin{aligned} F_x\, x_1 + F_y\, y_1 + F_z\, z_1 = 0 \\ F_x\, x_2 + F_y\, y_2 + F_z\, z_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

que junto con las relaciones (7.5), resulta

$$F_\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial u^1} + F_\mu \frac{\partial\mu}{\partial u^1} = 0$$

$$F_\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial u^2} + F_\mu \frac{\partial\mu}{\partial u^2} = 0$$

Ya que el determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(u^1, u^2)} \right| \neq 0,$$

según nuestra suposición, resulta que $F_\lambda = F_\mu = 0$. Por lo que las coordenadas de los puntos de la envolvente satisfacen a las ecuaciones del enunciado de la proposición.

Por otra parte, ya que los puntos singulares santisfacen a $F_x = F_y = F_z = 0$, de las ecuaciones (7.5) resulta, por el mismo razonamiento anterior que dichos puntos singulares satisfacen a

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \qquad F_\mu(x, y, z, \lambda, \mu) = 0.$$

□

Nota 7.14 Si deseamos hallar la envolvente de una familia biparamétrica de superficies dada, podemos usar λ y μ como parámetros en la envolvente y hallar x, y, z como funciones de λ y μ; o bien, eliminando λ y μ para obtener la ecuación implícita de la envolvente.

En ambos casos es necesario separar los puntos singulares que las superficies de la familia tuvieran.

Ejemplo 7.15 *Siendo A, B y C las proyecciones sobre los ejes coordenados de un punto M variable del plano $x+y+z-1=0$, encontar la envolvente de los planos determinados por los puntos A, B y C.*

Si $A(u,0,0), B(0,v,0)$ y $C(0,0,w)$ son los puntos proyección sobre los ejes del punto $M=(u,v,w)$ sobre el plano dado, la ecuación del plano determinado por ellos es $vwx+uwy+uvz-uvw=0$, cumpliéndose la condición $u+v+w-1=0$ o $w=1-u-v$.

Para determinar la envolvente pedida debemos expresar las coordenadas x, y y z en función de u y v, a partir de las relaciones:

$$\begin{array}{l} F(x,y,z,u,v)=vwx+uwy+uvz-uvw=0 \\ F_u(x,y,z,u,v)=-vx+(w-u)y+vz-vw+uv=0 \\ F_v(x,y,z,u,v)=(w-v)x-uy+uz-uw+uv=0. \end{array}$$

Se trata de resolver, utilizando, por ejemplo, la regla de Cramer, el siguiente sistema de ecuaciones lineales, en las variables x, y y z:

$$\begin{array}{rrrl} vwx+ & uwy+ & uvz= & uvw \\ -vx+ & (w-u)y+ & vz= & vw-uv \\ (w-v)x+ & (-u)y+ & uz= & uw-uv. \end{array}$$

Resultando las siguientes ecuaciones paramétricas de la envolvente:

$$x=\frac{u^3vw}{uvw}=u^2; \qquad y=\frac{uv^3w}{uvw}=v^2; \qquad z=\frac{uvw^3}{uvw}=w^2=(1-u-v)^2.$$

O bien, en implícitas:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1,$$

y quitando radicales

$$x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}=1,$$

$$(x+y+z-1)^2=4xy+4xz+4yz+4\sqrt{x^2yz}+8\sqrt{xy^2z}+8\sqrt{xyz^2},$$

$$(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz-2x-2y-2z+1)^2=$$

$$=64x^2yz+64xy^2z+64xyz^2+2\cdot 64\sqrt{x^3y^3z^2}+2\cdot 64\sqrt{x^3y^2z^3}+2\cdot 64\sqrt{x^2y^3z^3}=$$

$$=64xyz(x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz})=64xyz.$$

$$(x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz-2x-2y-2z+1)^2-64xyz=0.$$

TEMA VIII

Superficies regladas

8.1 Superficies desarrollables

Definición 8.1 *Se llaman* superficies desarrollables *al plano y las superficies que son envolventes de una familia uniparamétrica de planos (superficies tangente, cónica y cilíndrica).*

Demostraremos en esta lección que toda superficie tangente, cónica y cilíndrica es envolvente de una familia uniparamétrica de planos (i.e. el recíproco del resultado obtenido en el tema anterior). Además, todo plano tangente tiene un contacto con la superficie a lo largo de una recta – la curva característica de la familia –. Consecuentemente una superficie desarrollable es generada por la familia de generadores rectilíneos y todos los planos tangentes en los puntos de un generador particular coinciden.

Superficie formada por las tangentes a una curva en el espacio

Sea la curva $\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3 \quad u^1 \mapsto \vec{\alpha}(u^1)$ de clase C^3, y supondremos para simplificar que u^1 es parámetro natural de la curva. La ecuación de la recta tangente en un punto correspondiente al valor u^1 del parámetro es entonces $\overrightarrow{\beta} : I\!R \to I\!R^3$ $u^2 \mapsto \vec{\beta}(u^1) = \vec{\alpha}(u^1) + u^2\dot{\vec{\alpha}}(u^1)$, donde u^2 es el parámetro de la representación paramétrica de la curva.

Si consideramos u^1 y u^2 como dos parámetros independientes, entonces esta última ecuación viene a ser la representación paramétrica de la superficie formada

por las tangentes a la curva dada (superficie tangente). Las curvas de parámetro u^2 (es decir, $u^1 = cte$) son las generatrices rectilíneas de la superficie.

En primer lugar, tratamos de encontrar el vector normal a la superficie. La ecuación de la superficie tangente es

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = \vec{\alpha}(u^1) + u^2\vec{t}(u^1)$$

entonces, por las fórmulas de Frenet,

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = \vec{t}(u^1) + u^2\kappa(u^1)\vec{n}(u^1), \qquad \vec{\mathbf{x}}_2 = \vec{t}(u^1)$$

y, por tanto

$$\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2 = -u^2\kappa(u^1)\vec{t}(u^1) \times \vec{n}(u^1) = -u^2\kappa(u^1)\vec{b}(u^1).$$

Así la representación de la superficie tangente es regular excepto en los puntos de la curva misma ($u^2 = 0$) y en los puntos de las generatrices que son tangentes a la curva en puntos donde $\kappa(u^1) = 0$. En todo otro punto la normal a la superficie será

$$\vec{\mathbf{N}}(u^1, u^2) = -sgn(u^2)\vec{b}(u^1), \qquad \text{donde} \qquad sgn(u^2) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad u^2 > 0 \\ -1 & \text{si} \quad u^2 < 0 \end{cases}$$

El plano tangente a la superficie en el punto (u^1, u^2), tiene la ecuación:

$$\big(\vec{\mathbf{y}} - \vec{\alpha}(u^1) - u^2\vec{t}(u^1)\big) \cdot \vec{b}(u^1) = 0,$$

o sea
$$\big(\vec{\mathbf{y}} - \vec{\alpha}(u^1)\big) \cdot \vec{b}(u^1) = 0.$$

Esta ecuación depende sólo del parámetro u^1 y es la ecuación del plano osculador a la curva en el punto correspondiente al parámetro u^1. Así el plano tangente a la superficie a lo largo de una generatriz es constante y coincide con el plano osculador a la curva en el punto correspondiente. Por tanto:

"La superficie es la envolvente de los planos osculadores a la curva."

En el caso en que la curva sea plana, todas las tangentes quedan en el plano de la curva y cubren parte del plano.

Con objeto de obtener una visión más clara sobre la naturaleza de la superficie y el papel de la misma curva, vamos a cortar la superficie por un plano normal a la curva, obteniéndose así una curva, la cual "tiene un punto de retroceso en el punto de la curva dada".

En efecto:

Sea P_0 el punto de la curva correspondiente al parámetro u_0^1. Entonces la ecuación del plano normal es

$$\big(\vec{\mathbf{y}} - \vec{\alpha}(u_0^1)\big) \cdot \vec{t}(u_0^1) = 0,$$

al intersecarlo con la superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = \vec{\alpha}(u^1) + u^2\vec{t}(u^1)$, resulta

$$\left(\vec{\alpha}(u^1) - \vec{\alpha}(u^1_0)\right) \cdot \vec{t}(u^1_0) + u^2\vec{t}(u^1) \cdot \vec{t}(u^1_0) = 0,$$

de donde

$$u^2 = -\frac{\left(\vec{\alpha}(u^1) - \vec{\alpha}(u^1_0)\right) \cdot \vec{t}(u^1_0)}{\vec{t}(u^1) \cdot \vec{t}(u^1_0)} = -\lambda(u^1);$$

lo cual tiene sentido si u^1 está próximo a u^1_0 (para que $\vec{t}(u^1)$ y $\vec{t}(u^1_0)$ no sean perpendiculares).

Sustituyendo este valor de u^2 en la ecuación de la superficie obtenemos una ecuación paramétrica (con parámetro u^1) de la intersección en cuestión:

$$\vec{\gamma}(u^1) = \vec{\alpha}(u^1) - \lambda(u^1)\vec{t}(u^1)$$

el parámetro u^1 no es, en general, longitud de arco de esta curva.

Usando las fórmulas de Frenet para la curva inicial, encontramos:

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}\,' &= \dot{\vec{\alpha}} - \lambda'\vec{t} - \lambda\kappa\vec{n} = (1-\lambda')\vec{t} - \lambda\kappa\vec{n}.\\
\vec{\gamma}\,'' &= -\lambda''\vec{t} + (1-\lambda')\kappa\vec{n} - \lambda'\kappa\vec{n} + \lambda\kappa^2\vec{t} - \lambda\kappa\tau\vec{b} - \lambda\kappa'\vec{n} =\\
&= (-\lambda'' + \lambda\kappa^2)\vec{t} + (\kappa - \lambda\kappa' - 2\kappa\lambda')\vec{n} - \kappa\lambda\tau\vec{b}.
\end{aligned}$$

Calculemos ahora la derivada de λ:

$$\lambda' = \frac{\left(\vec{t}(u^1)\cdot\vec{t}(u^1_0)\right)\left(\vec{t}(u^1)\cdot\vec{t}(u^1_0)\right) - \left(\left(\vec{\alpha}(u^1) - \vec{\alpha}(u^1_0)\right)\cdot\vec{t}(u^1_0)\right)\left(\kappa(u^1)\vec{n}(u^1)\cdot\vec{t}(u^1_0)\right)}{\left(\vec{t}(u^1)\cdot\vec{t}(u^1_0)\right)^2} =$$

$$= 1 - \frac{\left(\vec{\alpha}(u^1) - \vec{\alpha}(u^1_0)\right)\cdot\vec{t}(u^1_0)}{\left(\vec{t}(u^1)\cdot\vec{t}(u^1_0)\right)}\kappa(u^1)\frac{\vec{n}(u^1)\cdot\vec{t}(u^1_0)}{\left(\vec{t}(u^1)\cdot\vec{t}(u^1_0)\right)} = 1 - \lambda\kappa\frac{\vec{n}\cdot\vec{t}_0}{\vec{t}\cdot\vec{t}_0}.$$

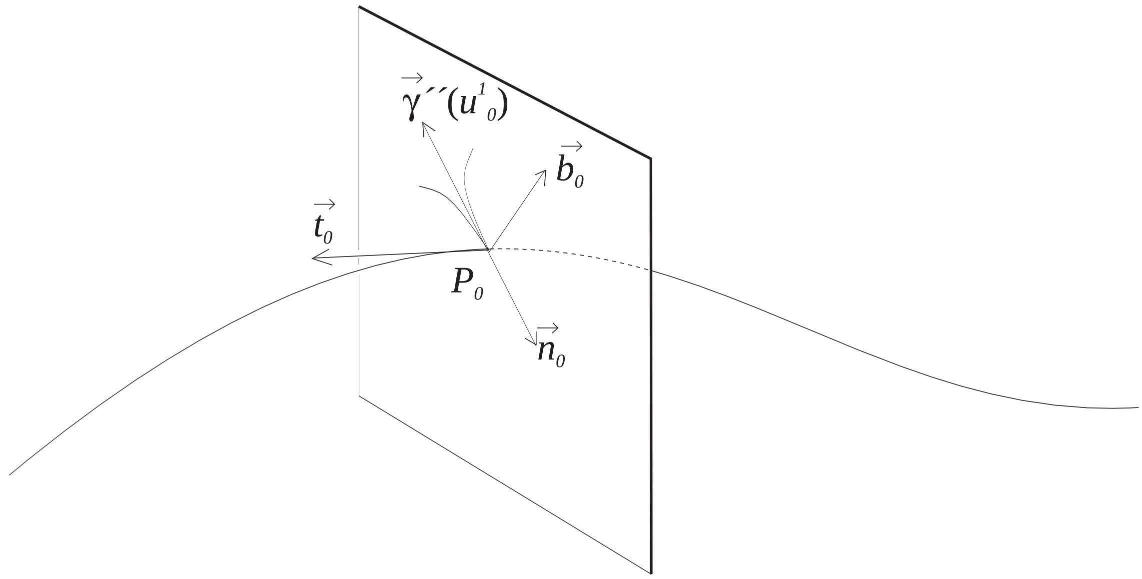
$$\lambda'' = -(\lambda\kappa)'\frac{\vec{n}\cdot\vec{t}_0}{\vec{t}\cdot\vec{t}_0} - \lambda\kappa\left(\frac{\vec{n}\cdot\vec{t}_0}{\vec{t}\cdot\vec{t}_0}\right)'.$$

Entonces en el punto u^1_0 tenemos $\vec{n}_0\cdot\vec{t}_0 = 0$ y

$$\lambda(u^1_0) = 0, \qquad \lambda'(u^1_0) = 1, \qquad \lambda''(u^1_0) = 0,$$

lo que significa que

$$\vec{\gamma}\,'(u^1_0) = 0, \qquad \vec{\gamma}\,''(u^1_0) = -\kappa(u^1_0)\vec{n}(u^1_0).$$



Por tanto, la segunda derivada es no nula salvo en los puntos de la curva de partida donde $\kappa(u_0^1) = 0$. El punto es por tanto un vértice de la curva intersección del plano normal en P_0 con la superficie; las dos ramas de la curva se aproximan a P_0 desde el lado negativo de la normal principal de la curva inicial, es decir, desde la parte conexa de curva. Esto justifica el nombre de arista de retroceso dado a la curva inicial.

Superficies cónicas y cilíndricas

Supongamos que el vértice del cono es el origen de coordenadas y que su directriz tenga una ecuación paramétrica de clase C^1

$$\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3 \qquad u^1 \mapsto \vec{\alpha}(u^1).$$

Entonces, la ecuación paramétrica del cono será

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = u^2 \vec{\alpha}(u^1).$$

Luego

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = u^2 \vec{\alpha}\,'(u^1), \qquad \vec{\mathbf{x}}_2 = \vec{\alpha}(u^1), \qquad \vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2 = u^2 \vec{\alpha}\,'(u^1) \times \vec{\alpha}(u^1).$$

Si los vectores $\vec{\alpha}(u^1)$ y $\vec{\alpha}\,'(u^1)$ no son colineales (podrían serlo, para u^1 en algún intervalo, sólo para el caso en que la ecuación represente un segmento de una recta, la cual pasa por el vértice para valores de u^1 en ese intervalo) y $u^2 \neq 0$ (lo que significa que el punto no es el vértice), entonces el punto de coordenadas (u^1, u^2) es un punto regular y el plano tangente en él tiene por ecuación

$$[(\vec{\mathbf{y}} - u^2 \vec{\alpha}(u^1)) \;\; \vec{\alpha}\,'(u^1) \;\; \vec{\alpha}(u^1)] = 0,$$

o sea

$$[\vec{\mathbf{y}} \;\; \vec{\alpha}\,'(u^1) \;\; \vec{\alpha}(u^1)] = 0.$$

Así la ecuación depende de u^1 solamente, y la familia de planos tangentes es una familia uniparamétrica de planos cuya envolvente es la superficie cónica.

Un cilindro con curva directriz de clase C^1 $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3 \quad u^1 \mapsto \vec{\alpha}(u^1)$ y generatrices paralelas a una dirección constante $\vec{a}$, tiene por ecuación

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = \vec{\alpha}(u^1) + u^2\vec{a},$$

de donde
$$\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2 = \vec{\alpha}\,'(u^1) \times \vec{a}$$

y la ecuación del plano tangente será

$$[(\vec{\mathbf{y}} - \vec{\alpha}(u^1) - u^2\vec{a}) \ \ \vec{\alpha}\,'(u^1) \ \ \vec{a}] = 0,$$

o sea
$$[\vec{\mathbf{y}} - \vec{\alpha}(u^1) \ \ \vec{\alpha}\,'(u^1) \ \ \vec{a}] = 0$$

es decir
$$[\vec{\mathbf{y}} \ \ \vec{\alpha}\,'(u^1) \ \ \vec{a}] = [\vec{\alpha}(u^1) \ \ \vec{\alpha}\,'(u^1) \ \ \vec{a}].$$

$$\vec{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{N}}(u^1) = f(u^1)$$

con $\vec{\mathbf{N}}(u^1) = \vec{\alpha}\,'(u^1) \times \vec{a}$, $\ f(u^1) = [\vec{\alpha}(u^1) \ \ \vec{\alpha}\,'(u^1) \ \ \vec{a}]$ que de nuevo representa una familia uniparamétrica de planos de los que la envolvente es la superficie cilíndrica.

8.2 Superficies regladas

Las superficies desarrollables estudiadas anteriormente son un caso particular de un tipo más general de superficies llamadas superficies regladas y que pasamos a estudiar ahora.

Definición 8.2 *Una* superficie reglada *es una superficie que tiene la propiedad que a través de todo punto de ella pasa, al menos, una recta que está enteramente contenida en la superficie.*

Así la superficie está generada por rectas llamadas generatrices rectilíneas.

Ejemplos de superficies regladas son las ya citadas superficies desarrollables: superfices tangente, cónica y cilíndrica (Proposición 7.10); el helicoide (Ejemplo 6.19); el conoide (Ejemplo 6.20); el paraboloide hiperbólico y el hiperboloide de una hoja (realmente estas dos cuádricas de ecuaciones

$$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

respectivamente, poseen dos familias distintas de generadores rectilíneos).

En orden a encontrar una ecuación paramétrica de una superficie reglada escojamos una curva $\mathcal{C}$ en la superficie, transversal a las generatrices rectilíneas. Sea la ecuación paramétrica de dicha curva

$$\overrightarrow{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3 \qquad u^1 \mapsto \vec{\alpha}(u^1).$$

Llamamos a esta curva directriz de la superficie. En todo punto de esta curva tomamos el vector unitario de la generatriz rectilínea que pasa por este punto. Este vector unitario depende de u^1, así tenemos otra aplicación

$$\overrightarrow{\beta} : I \to \mathbb{R}^3 \qquad u^1 \mapsto \vec{\beta}(u^1), \qquad \|\vec{\beta}(u^1)\| = 1.$$

Ahora podemos escribir la ecuación de la superficie en la forma

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = \vec{\alpha}(u^1) + u^2\vec{\beta}(u^1).$$

El parámetro u^1 indica la generatriz rectilínea de la superficie en la que el punto de coordenadas curvilíneas (u^1, u^2) está, y el parámetro u^2 determina la posición de este punto en la generatriz.

Supondremos en lo que sigue que ambas funciones $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ son de clase C^1.

Proposición 8.3 *Una superficie reglada regular de clase C^1*

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = \vec{\alpha}(u^1) + u^2\vec{\beta}(u^1)$$

es desarrollable si y sólo si $[\vec{\alpha}\,' \ \ \vec{\beta}\,' \ \ \vec{\beta}] = 0$.

Demostración.- De la ecuación de la superficie surge:

$$\vec{\mathbf{x}}_1 = \vec{\alpha}\,'(u^1) + u^2\vec{\beta}\,'(u^1), \qquad \vec{\mathbf{x}}_2 = \vec{\beta}(u^1)$$

$$\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2 = \vec{\alpha}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1) + u^2\vec{\beta}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)$$

La superficie será desarrollable si y sólo si los planos tangentes en todos los puntos de la generatriz rectilínea coinciden, lo cual sucederá si y sólo si la dirección del vector normal $\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2$ no depende de u^2; esto naturalmente ocurre si y sólo si $\vec{\alpha}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)$ y $\vec{\beta}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)$ son linealmente dependientes para todo u^1, o sea

$$\left(\vec{\alpha}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)\right) \times \left(\vec{\beta}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)\right) = \vec{0}.$$

Pero efectuando el producto resulta [(1)] :

$$[\vec{\alpha}\,'(u^1) \ \ \vec{\beta}\,'(u^1) \ \ \vec{\beta}(u^1)]\vec{\beta}(u^1) - [\vec{\beta}\,'(u^1) \ \ \vec{\beta}(u^1) \ \ \vec{\beta}(u^1)]\vec{\alpha}\,'(u^1) = \vec{0},$$

de donde

$$[\vec{\alpha}\,'(u^1) \ \ \vec{\beta}\,'(u^1) \ \ \vec{\beta}(u^1)]\vec{\beta}(u^1) = \vec{0}.$$

□

En general cuando la superficie no es desarrollable, los vectores $\vec{\alpha}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)$ y $\vec{\beta}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)$ son linealmente independientes y el vector normal $\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2$ cambia su

(1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a}$, ver Apéndice A, pág. 179.

dirección a lo largo de la generatriz cuando u^2 varía. Toda la generatriz rectilínea queda en el plano tangente en todo punto de la generatriz pero los planos tangentes varían de un punto a otro. En otras palabras, el plano tangente gira alrededor de la generatriz rectilínea cuando el punto de contacto se mueve a lo largo de ella. El plano tangente en P_0 interseca a la superficie a lo largo de la generatriz rectilínea que pasa por P_0.

Estudiamos ahora el comportamiento del vector normal a la superficie cuando $u^2 \to \infty$. Para ello reemplazaremos $\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2$ por el vector

$$\vec{\mathbf{N}}^* = \frac{\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2}{|u^2|} = \frac{\vec{\alpha}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)}{|u^2|} + sgn(u^2)\vec{\beta}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1),$$

el cual está bien definido para $u^2 \neq 0$ y tiene la misma dirección que $\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2$. El correspondiente vector normal unitario $\vec{\mathbf{N}}$ tendrá la misma dirección, estará definido para todo u^2 y, con tal que $\vec{\alpha}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)$ y $\vec{\beta}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)$ sean linealmente independientes, dependerá continuamente de u^2, puesto que en este caso $\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2$ es distinto de cero para todo u^2.

Cuando

$$\begin{aligned} u^2 &\to -\infty, & \vec{\mathbf{N}}^* &\to -\vec{\beta}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1). \\ u^2 &\to \infty, & \vec{\mathbf{N}}^* &\to \vec{\beta}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1). \end{aligned}$$

Esto significa que como el punto de contacto se mueve a lo largo de toda la recta generatriz el plano tangente gira en total un ángulo π alrededor de la generatriz, siendo la posición límite del plano tangente perpendicular a $\vec{\beta}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)$.

Definición 8.4 *A este plano se le denomina* plano asintótico.

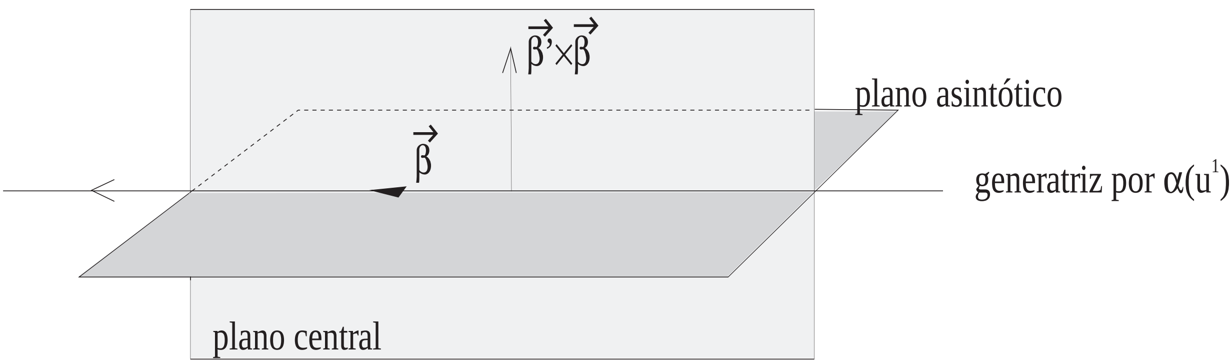
La ecuación del plano asintótico es, teniendo presente que contiene a todos los puntos de la generatriz y en particular al punto de la directriz por donde pasa la generatriz:

$$[\vec{\mathbf{y}} - \vec{\alpha}(u^1)\ \vec{\beta}(u^1)\ \vec{\beta}\,'(u^1)] = 0.$$

Definición 8.5 *Se llama* plano central *correspondiente a una generatriz, al plano tangente en un punto de la misma y que es perpendicular al plano asintótico.*

Este es perpendicular al vector $\vec{\beta} \times (\vec{\beta}\,' \times \vec{\beta})$, luego su ecuación es

$$[\vec{\mathbf{y}} - \vec{\alpha}(u^1)\ \vec{\beta}(u^1)\ \vec{\beta}(u^1) \times \vec{\beta}\,'(u^1)] = 0.$$



Definición 8.6 *Se llama* punto central *o* punto de estricción *al punto de una generatriz de una superficie reglada en el que el plano tangente es el plano central.*

Definición 8.7 *Se llama* línea de estricción *de una superficie reglada a la curva lugar geométrico de los puntos centrales.*

Pasemos a determinar la ecuación de la línea de estricción:

Sea (u^1, u^2) el punto central de la generatriz u^1. Entonces, el vector normal a la superficie en este punto, $\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2$ es perpendicular a $\vec{\beta}'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)$, o sea

$$\left(\vec{\alpha}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1) + u^2 \vec{\beta}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)\right)\left(\vec{\beta}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)\right) = 0,$$

lo que, operando nos lleva a

$$\left(\vec{\alpha}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)\right)\left(\vec{\beta}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)\right) + u^2 \left(\vec{\beta}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1)\right)^2 = 0$$

y aplicando las fórmulas (ver pág. 179):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{b} \cdot \vec{d})(\vec{c} \cdot \vec{a}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{d} \cdot \vec{a}) \qquad (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2,$$

resulta que

$$1 \cdot (\vec{\alpha}\,'(u^1) \cdot \vec{\beta}\,'(u^1)) - 0 \cdot (\vec{\alpha}\,'(u^1) \cdot \vec{\beta}(u^1)) + u^2 (\vec{\beta}\,'(u^1))^2 \cdot 1 - 0^2) = 0,$$

es decir
$$\vec{\alpha}\,'(u^1) \cdot \vec{\beta}\,'(u^1) + u^2 (\vec{\beta}\,'(u^1))^2 = 0.$$

A la vista de esta ecuación se deduce que si $(\vec{\beta}\,'(u^1))^2 = 0$, no existe el punto de estricción (pues no depende de u^2) y esto puede suceder para u^1 en un intervalo solamente si la parte correspondiente de la superficie es un cilindro, puesto que entonces $\vec{\beta}(u^1)$ es constante.

Excepto para estos puntos la última ecuación determina u^2:

$$u^2 = -\frac{\vec{\alpha}\,'(u^1) \cdot \vec{\beta}\,'(u^1)}{(\vec{\beta}\,'(u^1))^2},$$

de donde, sustituyendo en la ecuación de la superficie, obtenemos el vector de posición del punto sobre la <u>línea de estricción</u> $\overrightarrow{\gamma} : I \rightarrow I\!R^3$,

$$\boxed{\vec{\gamma}(u^1) = \vec{\alpha}(u^1) - \frac{\vec{\alpha}\,'(u^1) \cdot \vec{\beta}\,'(u^1)}{(\vec{\beta}\,'(u^1))^2}\vec{\beta}(u^1)} \tag{8.1}$$

Si el vector $\vec{\beta}(u^1)$, en la dirección de la directriz rectilínea no es unitario, se obtiene:

$$\vec{\gamma}(u^1) = \vec{\alpha}(u^1) - \frac{\vec{\beta}\,^2(\vec{\alpha}\,' \cdot \vec{\beta}\,') - (\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}\,')(\vec{\alpha}\,' \cdot \vec{\beta})}{\vec{\beta}\,^2(\vec{\beta}\,')^2 - (\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}\,')^2}\vec{\beta}(u^1)$$

Proposición 8.8 *En una superficie desarrollable la ecuación (8.1) representa la arista de retroceso.*

Demostración.- En tal caso $[\vec{\alpha}\,'(u^1)\ \vec{\beta}\,'(u^1)\ \vec{\beta}(u^1)] = 0$, si $\vec{\beta}\,'(u^1) \times \vec{\beta}(u^1) \neq \vec{0}$ (es decir si $\vec{\beta}, \vec{\beta}\,'$ no son colineales y por tanto $\vec{\beta}$ no es constante, o sea si no se trata de un cilindro), los vectores $\vec{\alpha}\,', \vec{\beta}\,', \vec{\beta}$ son coplanarios y se tiene

$$\vec{\alpha}\,'(u^1) = \lambda(u^1)\vec{\beta}(u^1) + \mu(u^1)\vec{\beta}\,'(u^1).$$

$$\vec{\alpha}\,'(u^1) \cdot \vec{\beta}\,'(u^1) = \mu(u^1)\vec{\beta}\,'(u^1) \cdot \vec{\beta}\,'(u^1).$$

Luego la ecuación (8.1) tiene la forma

$$\vec{\gamma}(u^1) = \vec{\alpha}(u^1) - \mu(u^1)\vec{\beta}(u^1).$$

Derivando respecto de u^1, tenemos

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}\,'(u^1) &= \vec{\alpha}\,'(u^1) - \mu(u^1)\vec{\beta}\,'(u^1) - \mu\,'(u^1)\vec{\beta}(u^1) = \\ &= \lambda(u^1)\vec{\beta}(u^1) + \mu(u^1)\vec{\beta}\,'(u^1) - \mu(u^1)\vec{\beta}\,'(u^1) - \mu\,'(u^1)\vec{\beta}(u^1) = \\ &= (\lambda(u^1) - \mu\,'(u^1))\vec{\beta}(u^1), \end{aligned}$$

por lo que si $\lambda - \mu\,' \neq 0$, la generatriz rectilínea es tangente a la línea de estricción, y por tanto se trata de una superficie tangente de la curva (8.1) y dicha curva es la arista de retroceso de la superficie.

Si $\lambda - \mu\,' = 0$ idénticamente en un intervalo, entonces la aplicación $\vec{\gamma} : I' \to \mathbb{R}^3$ es constante en este intervalo y la curva correspondiente se reduce a un punto, y la porción de superficie es un cono y (8.1) representa su vértice. □

Parámetro de distribución

Definición 8.9 *Se denomina* parámetro de distribución *de una superficie reglada a la función* $p(u^1) = [\vec{\alpha}\,'(u^1)\ \vec{\beta}(u^1)\ \vec{\beta}\,'(u^1)]$.

Existen varias interpretaciones geométricas de entre las cuales citamos las siguientes a modo de proposición, cuyas demostraciones omitimos:

Proposición 8.10 *El parámetro de distribución correspondiente a una generatriz u^1 es el límite del cociente entre la mínima distancia δ de la generatriz y la infinitamente próxima $u^1 + \Delta u^1$, y el ángulo φ entre dichas generatrices*

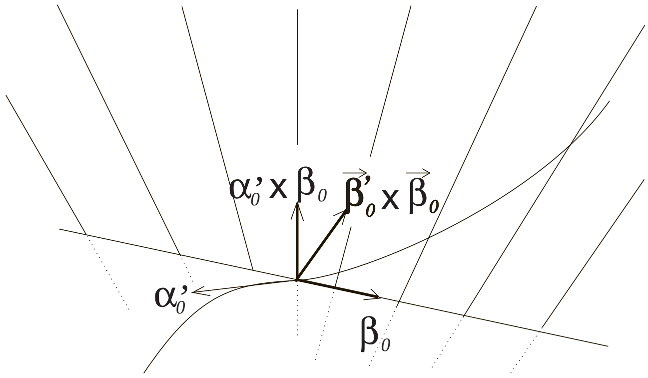
$$p(u^1) = \lim_{\Delta u^1 \to 0} \frac{\delta}{\varphi}$$

□

Proposición 8.11 *El parámetro de distribución es el cociente entre la distancia, d, de un punto cualquiera D de la generatriz u^1 al punto central C y la tangente del ángulo que forma el plano tangente en dicho punto D con el plano central.* □

Ejemplos

Ejemplo 8.12 *Las rectas normales a una superficie reglada no desarrollable en los puntos de una generatriz rectilínea, generan un paraboloide hiperbólico o silla de montar.*



Sea la ecuación de la superficie reglada:

$$\vec{\mathbf{x}}(s,u) = \vec{\alpha}(s) + u\vec{\beta}(s),$$

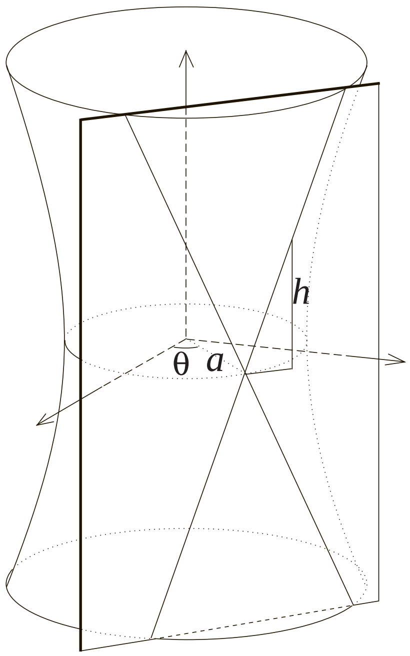
con $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ la curva directriz parametrizada con el parámetro arco y $\vec{\beta} = \vec{\beta}(s)$ es el vector que da la dirección de las generatrices que suponemos unitario.

$$\vec{\mathbf{x}}_s = \vec{\alpha}' + u\vec{\beta}'; \qquad \vec{\mathbf{x}}_u = \vec{\beta}. \qquad \vec{\mathbf{x}}_s \times \vec{\mathbf{x}}_u = \vec{\alpha}' \times \vec{\beta} + u\vec{\beta}' \times \vec{\beta}.$$

Tomamos en el punto de la directriz de parámetro s_0 un sistema de referencia (no necesariamente ortonormal) con vectores básicos $\{\vec{\beta}_0, \vec{\beta}' \times \vec{\beta}_0, \vec{\alpha}'_0 \times \vec{\beta}_0\}$.

En este sistema, un punto genérico de una recta perpendicular a la superficie tienen por coordenadas $x = u$, $y = uv$, $z = v$. Y eliminando parámetros tenemos la ecuación implícita de un paraboloide hiperbólico (cuádrica regular reglada con cónica impropia degenerada): $y = xz$.

Ejemplo 8.13 *La línea de estricción de un hiperboloide de una hoja de revolución es la circunferencia mínima de la superficie.*



El plano tangente en un punto $(a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)$ de la circunferencia mínima del hiperboloide

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \text{es} \qquad \frac{\cos\theta}{a}x + \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{a}y = 1.$$

El plano tangente en cualquier punto de una generatriz que pasa por ese punto contiene a dicha generatriz. Y el plano tangente en el punto impropio de esa generatriz es, si dicha generatriz tiene la dirección $(-a\,\mathrm{sen}\,\theta, a\cos\theta, c)$:

$$c\,\mathrm{sen}\,\theta x - c\cos\theta y + az = 0;$$

que es perpendicular al plano anterior; por lo que se tiene que $(a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)$ es un punto central.

Los cálculos anteriores nos permiten hayar la línea de estricción acudiendo a la fórmula (8.1), expresando paramétricamente la superficie por

$$\vec{\mathbf{x}}(\theta,v) = \vec{\alpha}(\theta) + v\vec{\beta}(\theta) = (a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta, 0) + v(a^2+c^2)^{-1/2}(-a\,\mathrm{sen}\,\theta, a\cos\theta, c).$$

$$\vec{\gamma}(\theta) = \vec{\alpha}(\theta) - \frac{\vec{\alpha}'(\theta)\cdot\vec{\beta}'(\theta)}{(\vec{\beta}'(\theta))^2}\vec{\beta}(\theta) = \vec{\alpha}(\theta) = (a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta, 0).$$

TEMA IX

Primera forma fundamental

En este Tema tratamos de medir distancias entre puntos, ángulos entre curvas y áreas de regiones en una superficie. Ello se logra introduciendo una métrica sobre la superficie: un modo de hacerlo es definiendo la métrica que sobre una superficie regular induce, por restricción, el producto escalar en $I\!R^3$; tal como se hace en la sección 9.2.

9.1 Tensores sobre una superficie

Sea P un punto regular de una superficie $\mathcal{M}$ en $I\!R^3$ y $T_P(\mathcal{M})$ el plano tangente en P en el que, como espacio vectorial que es, vamos a exponer conceptos de álgebra lineal [(1)].

Definición 9.1 *Un* tensor *de tipo* (r, s) *en* P *es un elemento del espacio vectorial* $\bigotimes_s^r T_P(\mathcal{M})$*.*

En particular un vector en P es un tensor de tipo $(1, 0)$.

Si $\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3 \;\; (u^1, u^2) \mapsto \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ es una representación paramétrica de $\mathcal{M}$ en un entorno de P, los vectores tangentes a las curvas coordenadas que pasan por P,

$$\vec{\mathbf{x}}_1(u_0^1, u_0^2) \in T_P(\mathcal{M}), \qquad \vec{\mathbf{x}}_2(u_0^1, u_0^2) \in T_P(\mathcal{M}),$$

(1) Ver Apéndice A, página 180, para tensores en espacios vectoriales.

forman una base del plano tangente (espacio vectorial tangente) a $\mathcal{M}$ en P. Por lo que les llamaremos vectores básicos relativos a la representación paramétrica $\mathbf{x} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$. Si $\vec{\mathbf{y}} : B \subset I\!R^2 \to I\!R^3 \quad (v^1, v^2) \mapsto \vec{\mathbf{y}}(v^1, v^2)$ es otra representación paramétrica local de $\mathcal{M}$ alrededor de P, los vectores básicos relativos a esta parametrización se relacionan con los anteriores por la fórmula:

$$\vec{\mathbf{y}}_j(v_0^1, v_0^2) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u^i}{\partial v^j}_{|(v_0^1, v_0^2)} \vec{\mathbf{x}}_i(u_0^1, u_0^2) \qquad (j = 1, 2)$$

siendo $u^i = u^i(v^1, v^2) \quad (i = 1, 2)$ las transformaciones de coordenadas.

Los co–vectores, 1–formas, o tensores de tipo $(0, 1)$ en el punto P de $\mathcal{M}$ son elementos $\theta \in T_P^*(\mathcal{M})$, es decir, aplicaciones lineales $\theta : T_P(\mathcal{M}) \to I\!R$.

La base dual de la base canónica $\{\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2\}$ la denotamos por $\{du^1, du^2\}$ y está constituida por las aplicaciones lineales, definidas sobre los elementos básicos por

$$du^i(\vec{\mathbf{x}}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Análogamente la base dual relativa a la base canónica $\{\vec{\mathbf{y}}_1, \vec{\mathbf{y}}_2\}$ la denotaremos por $\{dv^1, dv^2\}$. Y se tienen las siguientes fórmulas de cambio de base

$$dv^j = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial v^j}{\partial u^i}_{|(u_0^1, u_0^2)} du^i \qquad (j = 1, 2).$$

Decimos que $f : \mathcal{M} \to I\!R$ es una función diferenciable en un punto P de $\mathcal{M}$ si $f \circ \vec{\mathbf{x}} : A \to I\!R$ es diferenciable para una representación paramétrica local de $\mathcal{M}$ alrededor de P $\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3$. Y definimos la diferencial de f como la aplicación

$$df : T_P(\mathcal{M}) \to I\!R, \quad \vec{\mathbf{v}} \in T_P(\mathcal{M}) \mapsto df(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{v}}(f) = \frac{d}{dt} f(\vec{\alpha}(t))_{|t=0},$$

siendo $\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3$ una curva contenida en $\mathcal{M}$, tal que $\vec{\alpha}(0) = \overrightarrow{OP}$ y $\vec{\alpha}'(0) = \vec{\mathbf{v}}$. Es claro entonces que $df \in T_P^*(\mathcal{M})$.

En particular, si consideramos las funciones coordenadas $u^i : U \subset \mathcal{M} \to I\!R$, $(i = 1, 2)$, dadas por $\vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) \mapsto u^1$ y $\vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) \mapsto u^2$, sus diferenciales serán representadas por du^1 y du^2, respectivamente; verificándose que

$$du^i(\vec{\mathbf{x}}_j) = \frac{d}{du^j} u^i(\vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)) = \frac{d}{du^j}(u^i) = \delta_j^i.$$

Con esto queda justificada la notación para los elementos de la base dual $\{du^1, du^2\}$ de $T_P^*(\mathcal{M})$, asociada a la carta local $(U, \vec{\mathbf{x}})$, que hemos adoptado más arriba.

Resulta entonces que

$$df = \frac{\partial(f \circ \vec{\mathbf{x}})}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial(f \circ \vec{\mathbf{x}})}{\partial u^2} du^2.$$

Un campo de vectores sobre una superficie $\mathcal{M}$ se puede considerar como una aplicación X que asigna a cada punto de $\mathcal{M}$ un vector tangente a $\mathcal{M}$ en dicho punto.

En particular, a cada representación paramétrica local $\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3$ de una superficie $\mathcal{M}$ le están asociados dos campos de vectores denominados canónicos o básicos definidos en un entorno de $\mathcal{M}$ cuyos representantes en cada punto son los vectores tangentes a las líneas coordenadas que pasan por ellos. Por consiguiente, todo campo X de vectores definido en los puntos de la superficie correspondientes a la parametrización $\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3$ se expresará por

$$X = \sum_{i=1}^{2} X^i \vec{\mathbf{x}}_i,$$

donde las X^i son funciones, denominadas componentes del campo de vectores X respecto a los campos de vectores básicos $\vec{\mathbf{x}}_1$ y $\vec{\mathbf{x}}_2$.

Un campo de vectores X sobre $\mathcal{M}$ se dice que es diferenciable ($X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$) si sus componentes son diferenciables.

De manera similar se definen campos de tensores y su diferenciabilidad.

9.2 Primera forma fundamental

Definición 9.2 *Se denomina* primera forma fundamental *o métrica de Riemann de una superficie $\mathcal{M}$ al campo de tensores I de tipo (0,2) definido en cada punto P de $\mathcal{M}$ por la aplicación bilineal simétrica y definida positiva:*

$$I_P : T_P(\mathcal{M}) \times T_P(\mathcal{M}) \to I\!R \qquad I_P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \quad \forall \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in T_P(\mathcal{M}).$$

Las propiedades supuestas a I surgen de las correspondientes propiedades del producto escalar en $I\!R^3$.

En los puntos correspondientes a una parametrización $\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3$ $(u^1, u^2) \mapsto \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ la primera forma fundamental se expresa por

$$I = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} du^i \otimes du^j.$$

Las g_{ij} son las componentes (o coeficientes) de la primera forma fundamental, que vienen dadas por

$$g_{ij}(u^1, u^2) = I(\vec{\mathbf{x}}_i(u^1, u^2), \vec{\mathbf{x}}_j(u^1, u^2)) = \vec{\mathbf{x}}_i(u^1, u^2) \cdot \vec{\mathbf{x}}_j(u^1, u^2).$$

Si la representación paramétrica $\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3$ es de clase C^n la primera forma fundamental es diferenciable de clase C^{n-1}, es decir sus coeficientes son diferenciables de clase C^{n-1}.

Teniendo presente la simetría de los coeficientes y la definición de producto simétrico (pág. 184), podemos expresar la primera forma fundamental en la manera siguiente:

$$\begin{aligned} I &= g_{11}du^1 \otimes du^1 + g_{12}du^1 \otimes du^2 + g_{21}du^2 \otimes du^1 + g_{22}du^2 \otimes du^2 = \\ &= g_{11}du^1 \otimes du^1 + g_{12}(du^1 \otimes du^2 + du^2 \otimes du^1) + g_{22}du^2 \otimes du^2 = \\ &= g_{11}du^1 \odot du^1 + 2g_{12}du^1 \odot du^2 + g_{22}du^2 \odot du^2. \end{aligned}$$

$$\boxed{I = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1\,du^2 + g_{22}(du^2)^2}$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental forman una matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante, llamado discriminante de la primera forma fundamental, será denotado por g:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$

y es siempre mayor que cero, puesto que, de la identidad de Lagrange (página 179),

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{x}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}_1 & \vec{\mathbf{x}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}_2 \\ \vec{\mathbf{x}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}}_1 & \vec{\mathbf{x}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}}_2 \end{vmatrix} = (\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2) \cdot (\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2) = (\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2)^2 > 0.$$

Los elementos de la matriz inversa se denotan por g^{ij}, ellos son

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}; \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}; \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}.$$

La expresión de la primera forma fundamental respecto a otra representación paramétrica local de $\mathcal{M}$ $\vec{\mathbf{y}} : \bar{A} \subset I\!R^2 \to I\!R^3$, $(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \mapsto \vec{\mathbf{y}}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ se escribirá:

$$I = \bar{g}_{11}(d\bar{u}^1)^2 + 2\bar{g}_{12}d\bar{u}^1\,d\bar{u}^2 + \bar{g}_{22}(d\bar{u}^2)^2.$$

En los puntos comunes a ambas parametrizaciones los coeficientes de la primera forma fundamental se relacionan por:

$$\bar{g}_{hk} = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^h}\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^k} g_{ij}. \qquad (h, k = 1, 2)$$

9.3 Longitud de una curva sobre una superficie

Consideremos una curva en la superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ dada por las ecuaciones paramétricas

$$u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t) \qquad a \leq t \leq b.$$

La ecuación de la curva en la superficie es de la forma:

$$\overrightarrow{\alpha} : [a, b] \to I\!R^3 \ , \ \ t \mapsto \vec{\alpha}(t) = \vec{\mathbf{x}}(u^1(t), u^2(t)).$$

Proposición 9.3 *La longitud de arco de la curva $\vec{\alpha}(t) = \vec{\mathbf{x}}(u^1(t), u^2(t))$ entre t=a y t=b es igual a*

$$l = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt$$

donde los $g_{ij} = \vec{\mathbf{x}}_i \cdot \vec{\mathbf{x}}_j$ son los coeficientes de la primera forma fundamental.

Demostración.- Según el estudio hecho en la teoría de curvas (1.36), la longitud de un arco de curva en el espacio es

$$l = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt} \right\| dt,$$

y puesto que

$$\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt} = \vec{\mathbf{x}}_1 \frac{du^1}{dt} + \vec{\mathbf{x}}_2 \frac{du^2}{dt},$$

se sigue que:

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\right)^2 = \vec{\mathbf{x}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}_1 \left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + \vec{\mathbf{x}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}_2 \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \vec{\mathbf{x}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}}_1 \frac{du^2}{dt} \frac{du^1}{dt} + \vec{\mathbf{x}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}}_2 \left(\frac{du^2}{dt}\right)^2,$$

de donde se sigue la expresión del enunciado. □

Como sabemos, un vector tangente $\vec{\mathbf{a}}$ en un punto (u^1, u^2) de una superficie queda determinado por sus componentes (a^1, a^2) relativas a un sistema de coordenadas curvilíneas

$$\vec{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^{2} a^i \vec{\mathbf{x}}_i.$$

El cuadrado del módulo de este vector es igual a

$$\|\vec{\mathbf{a}}\|^2 = (\vec{\mathbf{a}})^2 = \left(\sum_{i=1}^{2} a^i \vec{\mathbf{x}}_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{2} a^i a^j (\vec{\mathbf{x}}_i \cdot \vec{\mathbf{x}}_j) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} a^i a^j.$$

El producto escalar de dos vectores tangentes $\vec{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^{2} a^i \vec{\mathbf{x}}_i$ y $\vec{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{2} b^i \vec{\mathbf{x}}_i$, en un mismo punto, es igual a

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \left(\sum_{i=1}^{2} a^i \vec{\mathbf{x}}_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{2} b^j \vec{\mathbf{x}}_j \right) = \sum_{i,j=1}^{2} a^i b^j \vec{\mathbf{x}}_i \cdot \vec{\mathbf{x}}_j = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} a^i b^j.$$

Si θ es el ángulo entre dos vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ obtenemos:

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}}{\|\vec{\mathbf{a}}\| \, \|\vec{\mathbf{b}}\|} = \frac{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} a^i b^j}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} a^i a^j} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} b^i b^j}}$$

Consideremos dos curvas de clase C^1,

$$u^1 = \phi^1(t), \; u^2 = \phi^2(t); \qquad u^1 = \psi^1(t), \; u^2 = \psi^2(t)$$

en una superficie, que pasan por un punto P_0 de coordenadas $u_0^i = \phi^i(t_0) = \psi^i(t_0)$, $(i = 1, 2)$. Sus representaciones paramétricas serán:

$\overrightarrow{\alpha} : I \to I\!R^3$, $\vec{\alpha}(t) = \vec{\mathbf{x}}(\phi^1(t), \phi^2(t))$; $\qquad \overrightarrow{\beta} : J \to I\!R^3$, $\vec{\beta}(t) = \vec{\mathbf{x}}(\psi^1(t), \psi^2(t))$.

El ángulo θ que forman estas dos curvas en el punto común P_0 es el que forman sus vectores tangentes en P_0:

$$\vec{\alpha}\,'(t) = \frac{d\phi^1}{dt}\vec{\mathbf{x}}_1 + \frac{d\phi^2}{dt}\vec{\mathbf{x}}_2; \qquad \vec{\beta}\,'(t) = \frac{d\psi^1}{dt}\vec{\mathbf{x}}_1 + \frac{d\psi^2}{dt}\vec{\mathbf{x}}_2$$

$$\cos\theta = \frac{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{d\phi^i}{dt}\frac{d\psi^j}{dt}}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{d\phi^i}{dt}\frac{d\phi^j}{dt}} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{d\psi^i}{dt}\frac{d\psi^j}{dt}}},$$

$$\operatorname{sen}\theta = \pm \frac{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}} \left(\frac{d\phi^1}{dt}\frac{d\psi^2}{dt} - \frac{d\phi^2}{dt}\frac{d\psi^1}{dt} \right)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{d\phi^i}{dt}\frac{d\phi^j}{dt}} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{d\psi^i}{dt}\frac{d\psi^j}{dt}}}.$$

Obsérvese que si bien para el $\cos\theta$ no hay ambigüedad en la elección el signo, si la hay para el $\operatorname{sen}\theta$.

En particular, si consideramos como tales curvas las curvas coordenadas dadas por $u^2 = cte.$ y $u^1 = cte.$ respectivamente, se tendrá:

$$\frac{d\phi^1}{dt} = 1, \; \frac{d\phi^2}{dt} = 0; \qquad \frac{d\psi^1}{dt} = 0, \; \frac{d\psi^2}{dt} = 1,$$

de donde, el ángulo entre ellas viene dado por

$$\cos\theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},$$

lo que implica que las curvas coordenadas son ortogonales si y sólo si $g_{12} = 0$. En este caso las coordenadas curvilíneas se dice que son ortogonales y la primera forma fundamental se escribe:

$$I = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2.$$

9.4 Area de una superficie

Para determinar el área de un dominio $\mathcal{D}$ de una superficie $\mathcal{M}$ correspondiente a la imagen de un rectángulo $\mathcal{R}$ en el plano de parámetros u^1, u^2, mediante la representación paramétrica $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$, hagamos una partición de dicho dominio $\mathcal{D}$ en un número finito de cuadriláteros utilizando las curvas

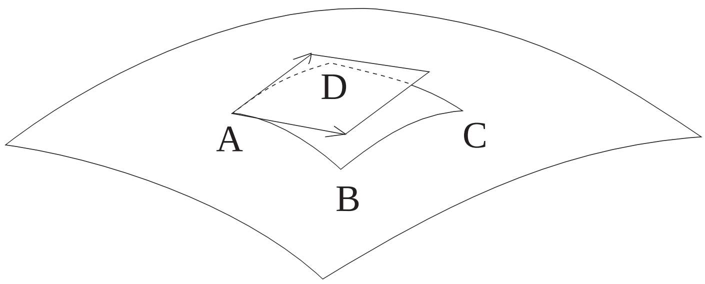
$$u^1 = u^1_0,\ u^1 = u^1_1, \dots, u^1 = u^1_n \qquad u^2 = u^2_0,\ u^2 = u^2_1, \dots, u^2 = u^2_m.$$

A continuación, reemplazaremos cada cuadrilátero ABCD acotado por las curvas

$$u^1 = u^1_{\lambda-1},\ u^1 = u^1_\lambda \qquad u^2 = u^2_{\mu-1},\ u^2 = u^2_\mu$$

por el paralelogramo rectilíneo en el plano tangente a la superficie en A$(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1})$, determinado por los vectores

$$(u^1_\lambda - u^1_{\lambda-1})\vec{\mathbf{x}}_1(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1}) \quad \text{y} \quad (u^2_\mu - u^2_{\mu-1})\vec{\mathbf{x}}_2(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1}),$$



que son ambos tangentes a los lados del cuadrilátero curvilíneo y los aproximan en longitud y dirección. Así aproximamos cada celda de la división original por un paralelogramo. El área de cada uno de estos paralelogramos es:

$$\begin{aligned}
&\|(u^1_\lambda - u^1_{\lambda-1})\vec{\mathbf{x}}_1(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1}) \times (u^2_\mu - u^2_{\mu-1})\vec{\mathbf{x}}_2(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1})\| = \\
&= (u^1_\lambda - u^1_{\lambda-1})(u^2_\mu - u^2_{\mu-1})\|\vec{\mathbf{x}}_1(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1}) \times \vec{\mathbf{x}}_2(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1})\| = \\
&= (u^1_\lambda - u^1_{\lambda-1})(u^2_\mu - u^2_{\mu-1})\sqrt{g(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1})}.
\end{aligned}$$

Si hacemos ahora la suma de las áreas de todos los paralelogramos obtenemos

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\sqrt{g(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1})}(u^1_\lambda - u^1_{\lambda-1})(u^2_\mu - u^2_{\mu-1}),$$

que es una aproximación del área del dominio $\mathcal{D}$. El área de $\mathcal{D}$ propiamente dicha será el límite de estas sumas cuando el diámetro de la partición tiende a cero. Si la función $\sqrt{g}$ es integrable en $\mathcal{R}$, que es el caso si $\mathcal{D}$ está contenido en un entorno de las coordenadas u^1, u^2 de una parametrización de clase C^1, entonces la suma en cuestión tiene un límite igual a la integral de la función $\sqrt{g}$ en $\mathcal{R}$, es decir

$$area(\mathcal{D}) = \iint\limits_{\mathcal{R}} \sqrt{g(u^1, u^2)} du^1\, du^2. \tag{9.1}$$

Observemos finalmente que para obtener esta fórmula hemos utilizado un sistema de coordenadas fijo, por tanto para tener la seguridad de que "área de $\mathcal{D}$" tiene significado geométrico independiente de las coordenadas, tendremos que probar que la fórmula que da el área conserva su forma bajo un cambio de coordenadas curvilíneas. Aplicando la fórmula (9.1) para las nuevas coordenadas tendremos que integrar sobre el dominio $\bar{\mathcal{R}}$ correspondiente al mismo dominio $\mathcal{D}$ sobre la superficie, así si $\bar{\mathcal{R}}$ es la imagen de $\mathcal{R}$ en la transformación de coordenadas $(u^1, u^2) \mapsto (\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ se obtendrá:

$$\iint\limits_{\bar{\mathcal{R}}} \sqrt{\bar{g}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} d\bar{u}^1\, d\bar{u}^2$$

$\bar{g} = \bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}^2$, pero

$$\bar{g} = (\vec{\mathbf{y}}_1 \times \vec{\mathbf{y}}_2)^2 = \left(\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}\right)^2 (\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2)^2 = \left(\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}\right)^2 g.$$

Por tanto,

$$\iint\limits_{\bar{\mathcal{R}}} \sqrt{\bar{g}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} d\bar{u}^1\, d\bar{u}^2 = \iint\limits_{\bar{\mathcal{R}}} \sqrt{g(u^1, u^2)} \left|\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}\right| d\bar{u}^1\, d\bar{u}^2 = \iint\limits_{\mathcal{R}} \sqrt{g(u^1, u^2)} du^1\, du^2,$$

de acuerdo con el teorema sobre el cambio de variables en una integral doble.

Ejemplos

Ejemplo 9.4 *La ecuación curvilínea de las curvas (llamadas loxodromas) que cortan a los meridianos de una superficie de revolución*

$$x = u\cos v, \qquad y = u \operatorname{sen} v, \qquad z = f(u),$$

según un ángulo constante θ es

$$v \operatorname{cotg} \theta = \int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{u}\sqrt{1 + (f'(u))^2} du + c.$$

La ecuación diferencial, en el plano coordenado, de las curvas paramétricas $\mathcal{C}_\lambda$: $v = \lambda$ es $dv = 0$.

Otra familia $\mathcal{C}_\mu$ de curvas sobre la superficie se obtiene estableciendo una relación entre los parámetros u y v de la forma: $\phi(u,v) = \mu$; por lo que, de nuevo, la ecuación diferencial, en el plano coordenado, de dicha familia de curvas es de la forma:

$$A(u,v)\,du + B(u,v)\,dv = 0. \qquad (A = \phi_u,\ B = \phi_v)$$

Para imponer que estas familias de curvas se corten según ángulo θ constante, se calculan los vectores tangentes a ambas, lo que va a permitir, conocer el $\cos\theta$ y el $\operatorname{sen}\theta$. Sean sus ecuaciones paramétricas:

$$\vec{\alpha}(t) = \vec{\mathbf{x}}(u(t), v(t)), \qquad \vec{\beta}(t) = \vec{\mathbf{x}}(\bar{u}(t), \bar{v}(t)).$$

$$\vec{\alpha}' = \vec{\mathbf{x}}_u, \qquad \vec{\beta}' = \vec{\mathbf{x}}_u \frac{d\bar{u}}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{d\bar{v}}{dt} \quad // \quad -B(u,v)\vec{\mathbf{x}}_u + A(u,v)\vec{\mathbf{x}}_v.$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{\alpha}' \cdot \vec{\beta}'}{\|\vec{\alpha}'\|\,\|\vec{\beta}'\|} = \frac{-g_{11}B + g_{12}A}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{B^2 g_{11} - 2g_{12}AB + g_{22}A^2}},$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\beta}'\|}{\|\vec{\alpha}'\|\,\|\vec{\beta}'\|} = \frac{A\|\vec{\mathbf{x}}_u \times \vec{\mathbf{x}}_v\|}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{B^2 g_{11} - 2g_{12}AB + g_{22}A^2}}.$$

$$\operatorname{tag}\theta = \frac{A\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}{-g_{11}B + g_{12}A} = \frac{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,dv}{g_{11}\,du - g_{12}\,dv}.$$

En este caso particular:

$$g_{11} = \vec{\mathbf{x}}_u \cdot \vec{\mathbf{x}}_u = (\cos v, \operatorname{sen} v, f') \cdot (\cos v, \operatorname{sen} v, f') = 1 + f'^2,$$

$$g_{12} = \vec{\mathbf{x}}_u \cdot \vec{\mathbf{x}}_v = (\cos v, \operatorname{sen} v, f') \cdot (-u \operatorname{sen} v, u\cos v, 0) = 0,$$

$$g_{22} = \vec{\mathbf{x}}_v \cdot \vec{\mathbf{x}}_v = (-u \operatorname{sen} v, u\cos v, 0) \cdot (-u \operatorname{sen} v, u\cos v, 0) = u^2,$$

$$\operatorname{tag}\theta = \frac{u\sqrt{1 - f'^2}\,dv}{(1 + f'^2)du}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{1 + f'^2}}{u}du = \operatorname{cotg}\theta\,dv,$$

$$\int \frac{1}{u}\sqrt{1 + f'^2}\,du = \operatorname{cotg}\theta\, v.$$

Ejemplo 9.5 *La ecuación curvilínea de las trayectorias ortogonales de las generatrices rectilíneas de la superficie reglada*

$$\vec{\mathbf{x}}(s,v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{\beta}(s), \qquad (\|\vec{\alpha}\,'(s)\| = 1,\ \|\vec{\beta}(s)\| = 1)$$

es

$$v = -\int_{s_0}^{s} \cos\theta(s)\,ds + c \qquad \big(\cos\theta(s) = \vec{t}(s) \cdot \vec{\beta}(s)\big).$$

Entonces dos trayectorias ortogonales intersecan según una distancia constante a todas las generatrices.

Las trayectorias ortogonales a las curvas $s = cte.$, es decir, a las que satisfacen $ds = 0$, serán las curvas $A(s,v)ds + B(s,v)dv = 0$, tales que el coseno del ángulo que formen sus vectores tangentes con los de las anteriores sea nulo. Las componentes de tales vectores son $(0,1)$ y $(B,-A)$, respecto a los vectores básicos $\{\vec{\mathbf{x}}_s, \vec{\mathbf{x}}_v\}$; así, se debe verificar

$$2Bg_{12} - Ag_{22} = 0.$$

Y como, $g_{22} = \vec{\mathbf{x}}_v \cdot \vec{\mathbf{x}}_v = \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = 1,\ g_{12} = \vec{\mathbf{x}}_s \cdot \vec{\mathbf{x}}_v = (\vec{t} + v\vec{\beta}') \cdot \vec{\beta} = \cos\theta(s).$ Luego

$$2B(s,v)\cos\theta(s) - A(s,v) = 0.$$

Las trayectorias ortogonales pedidas satisfacen a

$$B(s,v)(2\cos\theta(s) + dv) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -2\int_{s_0}^{s} \cos\theta(s)ds + c.$$

La ecuación paramétrica de tales trayectorias es pues

$$\vec{\gamma}(s) = \vec{\alpha}(s) - \Big(2\int_{s_0}^{s} \cos\theta(s)ds + c\Big)\vec{\beta}(s),$$

y, evidentemente, la distancia entre los puntos en que dos trayectorias γ_1 y γ_2 ortogonales cortan a las genetratrices es constante, igual a $|c_1 - c_2|$.

TEMA X

Operador forma. Segunda forma fundamental

Estudiaremos en este Tema la forma de la superficie en el entorno de un punto regular P; ello lo podemos hacer por dos vías diferentes: una estudiando la variación del vector normal a la superficie en puntos de curvas que pasan por dicho punto; y otra estudiando la distancia de los puntos de dicho entorno al plano tangente en P. Ambos procedimientos nos llevan a definir la segunda forma fundamental de la superficie.

10.1 Operador forma sobre una superficie

Un campo de vectores Z sobre en una superficie $\mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^3$ se puede interpretar como una aplicación que asigna un vector $Z_P \in T_P(\mathbb{R}^3)$ a cada punto P de $\mathcal{M}$.

$$Z: \; P \in \mathcal{M} \mapsto Z_P \in T_P(\mathbb{R}^3).$$

La derivada covariante $D_{\vec{v}}Z$ tiene sentido siempre que $\vec{v}$ sea tangente a $\mathcal{M}$, y se calcula por cualquiera de los siguientes métodos (ver § A.7):

1. Si $\mathcal{C}$ es una curva $\vec{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ en $\mathcal{M}$, tal que $\vec{\alpha}(0) = \overrightarrow{OP}$ y $\vec{\alpha}\,'(0) = \vec{v}$, entonces:

$$D_{\vec{v}}Z = \frac{dZ(\alpha(t))}{dt}(0).$$

2. Si $Z = \sum_{i=1}^{3} Z^i \mathbf{E}_i$ tenemos: $D_{\vec{v}} Z = \sum_{i=1}^{3} \vec{v}(Z^i)\mathbf{E}_i$.

Nota 10.1 Aunque $Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, campo de vectores diferenciable tangente a $\mathcal{M}$, $D_{\vec{v}} Z$ no tiene por qué ser tangente a $\mathcal{M}$.

Sea $P \in \mathcal{M}$ y $\vec{\mathbf{N}}$ una normal unitaria en un entorno de P. Si $\mathcal{M}$ es orientable, $\vec{\mathbf{N}}$ está definida globalmente.

Definición 10.2 *Sea $P \in \mathcal{M}$, la aplicación*

$$S_P : T_P(\mathcal{M}) \to T_P(\mathbb{R}^3)$$

definida por $S_P(\vec{v}) = -D_{\vec{v}}\vec{\mathbf{N}}$, se denomina operador forma *de $\mathcal{M}$ en P.*

Nota 10.3 S mide la variación de $\vec{\mathbf{N}}$ en la dirección de $\vec{v}$, y por consiguiente la variación del plano tangente; describe cómo se curva la superficie.

Proposición 10.4 *En $P \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, el operador forma $S_P : T_P(\mathcal{M}) \to T_P(\mathcal{M})$ es una aplicación lineal simétrica, es decir,*

$$S_P(\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot S_P(\vec{w}) \qquad (\, I(S_P(\vec{v}), \vec{w}) = I(\vec{v}, S_P(\vec{w})\,)\,).$$

Demostración.-

a) La aplicación está bien definida pues $S_P(\vec{v}) \in T_P(\mathcal{M})$, ya que

$$0 = \vec{v}(\vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{N}}) = D_{\vec{v}}\vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{N}}_P + \vec{\mathbf{N}}_P \cdot D_{\vec{v}}\vec{\mathbf{N}} = 2D_{\vec{v}}\vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{N}}_P = -2S_P(\vec{v}) \cdot \vec{\mathbf{N}}_P.$$

b) Es lineal:

$$S_P(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = -D_{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}}\vec{\mathbf{N}} = \lambda S_P(\vec{u}) + \mu S_P(\vec{v}).$$

c) Es simétrica, sólo basta probarlo con los vectores básicos:

$$S_P(\vec{\mathbf{x}}_i) = -D_{\vec{\mathbf{x}}_i}\vec{\mathbf{N}} = -\vec{\mathbf{N}}_i \qquad (i = 1, 2)$$

$$S_P(\vec{\mathbf{x}}_i) \cdot \vec{\mathbf{x}}_j = -\vec{\mathbf{N}}_i \cdot \vec{\mathbf{x}}_j = \vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_{ij} = \vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_{ji} = -\vec{\mathbf{N}}_j \cdot \vec{\mathbf{x}}_i = S_P(\vec{\mathbf{x}}_j) \cdot \vec{\mathbf{x}}_i.$$

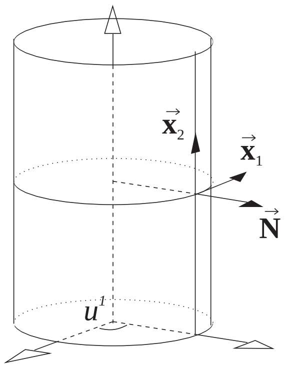
□

Ejemplo 10.5 Determinemos en algunos casos particulares el operador forma.

Esfera, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$:

$$\vec{\mathbf{N}} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3} x^i \mathbf{E}_i \qquad D_{\vec{v}}\vec{\mathbf{N}} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3} \vec{v}(x^i)\mathbf{E}_i = \frac{\vec{v}}{r} \qquad S_P(\vec{v}) = -\frac{\vec{v}}{r}.$$

Plano, $z = 0$: $\quad \vec{\mathbf{N}} = cte \quad D_{\vec{v}}\vec{\mathbf{N}} = 0 \quad S_P(\vec{v}) = 0.$



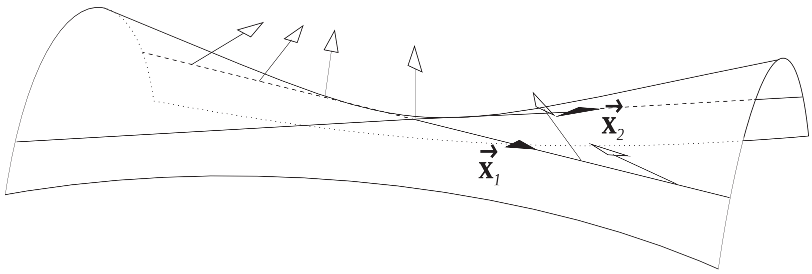
Cilindro, $x^2 + y^2 = r^2$:

$$S(\vec{\mathbf{x}}_2) = -D_{\vec{\mathbf{x}}_2}\vec{\mathbf{N}} = \vec{0}$$

$$S(\vec{\mathbf{x}}_1) = -D_{\vec{\mathbf{x}}_1}\vec{\mathbf{N}} = -\frac{\vec{\mathbf{x}}_1}{r}$$

$$\vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = (r \cos u^1,\ r \operatorname{sen} u^1, u^2)$$

Paraboloide hiperbólico (silla de montar), $z = xy$, en el origen:



$$S(\vec{\mathbf{x}}_1) = -D_{\vec{\mathbf{x}}_1}\vec{\mathbf{N}} = -\vec{\mathbf{x}}_2$$

$$S(\vec{\mathbf{x}}_2) = -D_{\vec{\mathbf{x}}_2}\vec{\mathbf{N}} = -\vec{\mathbf{x}}_1$$

$$\vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = (u^1,\ u^2,\ u^1 u^2)$$

10.2 Curvatura normal

Sea $\mathcal{M}$ una superficie que admite una normal unitaria (al menos localmente) $\vec{\mathbf{N}}$.

Proposición 10.6 *Si* $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ *es una curva en* $\mathcal{M}$, *entonces:*

$$\vec{\alpha}\,'' \cdot \vec{\mathbf{N}} = S(\vec{\alpha}\,') \cdot \vec{\alpha}\,'.$$

Demostración.-

$$\vec{\alpha}\,' \cdot \vec{\mathbf{N}} = 0 \ \Rightarrow\ \vec{\alpha}\,'' \cdot \vec{\mathbf{N}} + \vec{\alpha}\,' \cdot \vec{\mathbf{N}}\,' = 0 \ \Rightarrow\ \vec{\alpha}\,'' \cdot \vec{\mathbf{N}} = -\vec{\mathbf{N}}\,' \cdot \vec{\alpha}\,' = -(D_{\vec{\alpha}\,'}\vec{\mathbf{N}}) \cdot \vec{\alpha}\,' = S(\vec{\alpha}\,') \cdot \vec{\alpha}\,'.$$

□

Interpretación geométrica:

"Todas las curvas en $\mathcal{M}$ con vector tangente $\vec{v}$ en el punto P, tienen la misma componente normal de $\vec{\alpha}\,''$ en P, a saber, $S(\vec{v}) \cdot \vec{v}$". Es la componente de $\vec{\alpha}\,''$ que se ven obligadas a tener dichas curvas debido a la forma de la superficie $\mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^3$.

Definición 10.7 *Sea* $\vec{u} \in T_P(\mathcal{M})$ *un vector tangente unitario, entonces al número* $k(\vec{u}) = S(\vec{u}) \cdot \vec{u}$ *se le denomina* curvatura normal *de* $\mathcal{M}$ *en la dirección de* $\vec{u}$.

Nota 10.8 Obsérvese que $k(\vec{u}) = k(-\vec{u})$.

Proposición 10.9 (Teorema de Meusnier) *Sean $\mathcal{M}$ una superficie en $\mathbb{R}^3$, P un punto de $\mathcal{M}$, $\vec{u}$ un vector unitario tangente a $\mathcal{M}$ en P y $\vec{\mathbf{N}}$ la normal unitaria. Si $\vec{\alpha}$ es una curva en $\mathcal{M}$ con tangente unitaria y tal que $\vec{\alpha}(0) = \overrightarrow{OP}$ y $\vec{\alpha}\,'(0) = \vec{u}$, entonces*

$$k(\vec{u}) = \kappa(0) \cos \phi,$$

siendo κ la curvatura de $\vec{\alpha}$ y ϕ el ángulo entre $\vec{n}(0)$ y $\vec{\mathbf{N}}_P$.

Demostración.- $k(\vec{u}) = \ddot{\vec{\alpha}}(0) \cdot \vec{\mathbf{N}}_P = \kappa(0)\, \vec{n}(0) \cdot \vec{\mathbf{N}}_P = \kappa(0) \cos \phi.$ □

Definición 10.10 *Se denomina* sección normal de $\mathcal{M}$ *en la dirección de $\vec{u} \in T_P(\mathcal{M})$, a la curva intersección de $\mathcal{M}$ con el plano que contiene a $\vec{\mathbf{N}}_P$ y a $\vec{u}$.*

Se tiene de forma inmediata el siguiente resultado:

Proposición 10.11 *Si σ es la sección normal de $\mathcal{M}$ en la dirección de $\vec{u} \in T_P(\mathcal{M})$, entonces*

$$k(\vec{u}) = \pm\kappa_\sigma(0).$$

□

Interpretación geométrica del signo de la curvatura normal en la dirección $\vec{u} \in T_P(\mathcal{M})$. Para secciones normales, se tiene:

1. Si $k(\vec{u}) > 0$, $\vec{n}(0) = \vec{\mathbf{N}}_P$.

   La sección normal σ se flexiona hacia $\vec{\mathbf{N}}_P$ en P. La superficie $\mathcal{M}$ se flexiona hacia $\vec{\mathbf{N}}_P$ en la dirección de $\vec{u}$.

2. Si $k(\vec{u}) < 0$, $\vec{n}(0) = -\vec{\mathbf{N}}_P$.

   La superficie $\mathcal{M}$ se flexiona en el sentido contrario de $\vec{\mathbf{N}}_P$ en la dirección de $\vec{u}$.

3. Si $k(\vec{u}) = 0$, $\kappa_\sigma(0) = 0$.

   No podemos asegurar que la superficie $\mathcal{M}$ se flexione en la dirección de $\vec{u}$.

Definición 10.12 *Se denominan* curvaturas principales *de $\mathcal{M}$ en P, a los valores máximos y mínimos de la curvatura normal $k(\vec{u})$ de $\mathcal{M}$ en P cuando el vector tangente unitario $\vec{u}$ en P gira de tal forma que el extremo genera una circunferencia unitaria en el plano tangente a $\mathcal{M}$ en P. Se les denota por k_1 y k_2.*

Se denominan direcciones principales *de $\mathcal{M}$ en P a aquéllas en las que ocurren estos valores extremos.*

Se llaman vectores principales *de $\mathcal{M}$ en P a los vectores unitarios según las direcciones principales.*

Definición 10.13 *Un punto P de $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ es* umbilical *cuando la curvatura normal $k(\vec{u})$ es constante para todos los vectores unitarios $\vec{u}$ tangentes a $\mathcal{M}$ en P.*

Ejemplo 10.14 En la esfera, $S(\vec{u}) = -(1/r)\vec{u}$ y $k(\vec{u}) = -1/r$. Todos sus puntos son umbilicales.

Proposición 10.15

1. *Si P es un punto umbilical de $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, entonces el operador forma S en P es la multiplicación por un escalar $\lambda = k_1 = k_2$.*

2. *Si P no es umbilical, $k_1 \neq k_2$, entonces hay exactamente dos direcciones principales, y son ortogonales.*

   Además si $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son vectores principales en estas direcciones, entonces

$$S(\vec{v}_1) = k_1\vec{v}_1, \qquad S(\vec{v}_2) = k_2\vec{v}_2.$$

Nota 10.16 Las curvaturas principales de $\mathcal{M}$ en P son los valores propios de S, y los vectores principales de $\mathcal{M}$ en P son los vectores propios de S.

Demostración.- Supongamos que k toma el valor máximo k_1 en la dirección del vector tangente unitario $\vec{v}_1$:

$$k_1 = k(\vec{v}_1) = S(\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_1.$$

Sea $\vec{v}_2 \in T_P(\mathcal{M})$ unitario y ortogonal a $\vec{v}_1$. Demostremos que $\vec{v}_2$ es vector principal.

Sea $\vec{u} \in T_P(\mathcal{M})$ un vector unitario,

$$\vec{u} = \cos\,\theta\,\vec{v}_1 + \operatorname{sen}\,\theta\,\vec{v}_2.$$

Tenemos entonces la función de variable real:

$$\theta \mapsto \bar{k}(\theta) = k(\cos\,\theta\,\vec{v}_1 + \operatorname{sen}\,\theta\,\vec{v}_2).$$

$$\begin{aligned} \bar{k}(\theta) &= S(\cos\,\theta\,\vec{v}_1 + \operatorname{sen}\,\theta\,\vec{v}_2) \cdot (\cos\,\theta\,\vec{v}_1 + \operatorname{sen}\,\theta\,\vec{v}_2) \\ &= \cos^2\theta\, S_1^1 + 2\operatorname{sen}\,\theta\,\cos\,\theta\, S_2^1 + \operatorname{sen}^2\theta\, S_2^2, \end{aligned}$$

donde $S_j^i = S_i^j = S(\vec{v}_i) \cdot \vec{v}_j \;\; (i,j = 1,2)$.

$$\frac{d\bar{k}}{d\theta} = -2\cos\,\theta\,\operatorname{sen}\,\theta\, S_1^1 + (2\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta) S_2^1 + 2\operatorname{sen}\,\theta\,\cos\,\theta\, S_2^2.$$

Si $\theta = 0 \;\Rightarrow\; d\bar{k}/d\theta = 0 \;\Rightarrow\; 2S_2^1 = 0$. Luego, se tiene

$$S(\vec{v}_1) = S_1^1\vec{v}_1 \qquad S(\vec{v}_2) = S_2^2\vec{v}_2.$$

Distinguiremos dos casos:

1) P es umbilical

$$S_2^2 = S(\vec{v}_2) \cdot \vec{v}_2 = k(\vec{v}_2) = k_1 = S_1^1.$$

Así, S es la multiplicación por un escalar.

2) P no umbilical [1]

$$\bar{k}(\theta) = \cos^2\theta\, k_1 + \operatorname{sen}^2\theta\, S_2^2, \qquad k_1 > \bar{k}(\frac{\pi}{2}) = S_2^2.$$

$$\bar{k}'(\theta) = -2\operatorname{sen}\theta\cos\theta(k_1 - S_2^2), \qquad \bar{k}''(\theta) = 2(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)(k_1 - S_2^2).$$

$$\bar{k}'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \bar{k}''(0) = -(k_1 - S_2^2) < 0 & \text{(máximo)} \\ \bar{k}''(\frac{\pi}{2}) = k_1 - S_2^2 > 0 & \text{(mínimo)} \end{cases}$$

Luego $k_2 = \bar{k}(\pi/2) = S_2^2$. □

Corolario 10.17 (Fórmula de Euler) *Sean k_1, k_2 y $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ las curvaturas principales y los vectores principales de $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ en P. Entonces si $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{v}_1 + \operatorname{sen}\theta\,\vec{v}_2$, la curvatura normal de $\mathcal{M}$ en la dirección de $\vec{u}$ es*

$$k(\vec{u}) = k_1\cos^2\theta + k_2\operatorname{sen}^2\theta. \tag{10.1}$$

Interpretación geométrica de la curvatura normal

Elijamos una referencia en $\mathbb{R}^3$, con origen en un punto P de una superficie, el plano XY es el tangente a $T_P(\mathcal{M})$ y los ejes OX y OY son las direcciones principales. Así la superficie en un entorno del origen se expresa por

$$z = f(x, y).$$

Se tiene $f(0,0) = 0$, $f'_x(0,0) = 0$, $f'_y(0,0) = 0$.

$$f(x,y) \simeq \frac{1}{2}(f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2). \tag{10.2}$$

En las direcciones principales $\vec{v}_1 = (1,0,0)$, $\vec{v}_2 = (0,1,0)$ en P, se tiene:

$$S(\vec{v}_1) = -D_{\vec{v}_1}\vec{\mathbf{N}} = f''_{xx}(0,0)\vec{v}_1 + f''_{xy}(0,0)\vec{v}_2$$
$$S(\vec{v}_2) = -D_{\vec{v}_2}\vec{\mathbf{N}} = f''_{xy}(0,0)\vec{v}_1 + f''_{yy}(0,0)\vec{v}_2$$

$$\vec{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}(-f'_x, -f'_y, 1)$$

Como $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son vectores principales:

$$k_1 = f''_{xx}(0,0), \qquad k_2 = f''_{yy}(0,0), \qquad f''_{xy}(0,0) = 0.$$

Luego: "La forma de $\mathcal{M}$ en las proximidades de P es aproximadamente igual a la superficie

$$\mathcal{M}^* : \quad z = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2).$$

$\mathcal{M}^*$ se denomina aproximación cuadrática de $\mathcal{M}$ en las proximidades de P."

[1] Si $k_1 = S_2^2 \Rightarrow k(\theta) = k_1(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = k_1 \Rightarrow P$ es umbilical.

10.3 Curvatura de Gauss y curvatura media

Tratamos de examinar el significado geométrico de los invariantes traza y determinante del operador forma. Sea P un punto de una superficie $\mathcal{M}$ y S_P el operador forma en P.

Definición 10.18 *La* curvatura de Gauss *de* $\mathcal{M}$ *es* $K(P) = det\, S_P$.
La curvatura media *de* $\mathcal{M}$ *es* $H(P) = \frac{1}{2}\, traza\, S_P$.

De esta definición surge la siguiente:

Proposición 10.19 *La curvatura de Gauss y curvatura media se relacionan con las curvaturas principales por:*

$$K = k_1 k_2, \qquad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

□

Nota 10.20 La curvatura de Gauss es independiente de la elección de la normal unitaria a la superficie.

Corolario 10.21 *En una superficie orientada* $\mathcal{M}$ *las funciones curvaturas principales son:*

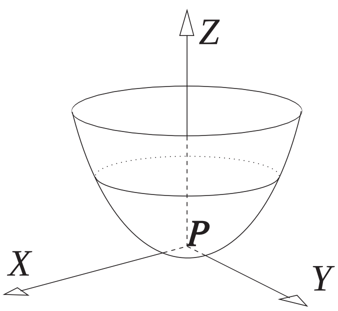
$$k_1,\, k_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

□

Clasificación de los puntos de una superficie

1. $K(P) > 0$ Punto elíptico

   Entonces $k_1(P)$ y $k_2(P)$ tienen el mismo signo. La fórmula de Euler (10.1) nos dice que $k(\vec{u}) > 0$ o $k(\vec{u}) < 0$, para todo vector unitario $\vec{u} \in T_P(\mathcal{M})$. Por lo que la superficie queda, en las proximidades del punto P, del mismo lado del plano tangente en P a $\mathcal{M}$.



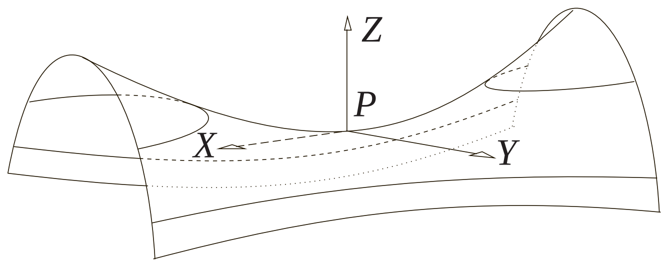
La aproximación cuadrática es:

$$2z = k_1(P)x^2 + k_2(P)y^2.$$

Por lo que las secciones de esta aproximación por planos perpendiculares al eje OZ, son elipses (reales o imaginarias).

2. $K(P) < 0$ Punto hiperbólico

Las curvaturas principales tienen signo opuesto en P y la aproximación cuadrática de $\mathcal{M}$, en las proximidades de P, es un hiperboloide:



$$2z = k_1(P)x^2 + k_2(P)y^2$$

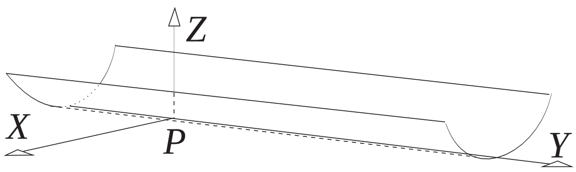
$$(k_1(P) > 0, \quad k_2(P) < 0).$$

Por lo que las secciones de esta aproximación por planos perpendiculares al eje OZ, son hipérbolas.

3. $K(P) = 0$

   (a) $k_1(P) \neq 0$ y $k_2(P) = 0$ Punto parabólico

   La aproximación cuadrática es un cilindro:

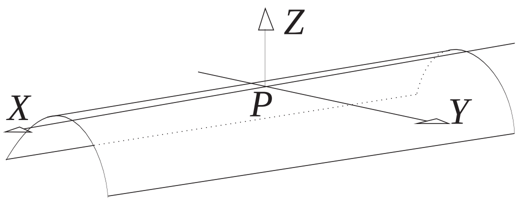


$$2z = k_1(P)x^2$$

$$(k_1(P) > 0)$$

   (b) $k_1(P) = 0$ y $k_2(P) \neq 0$ Punto parabólico

   La aproximación cuadrática es un cilindro:



$$2z = k_2(P)y^2$$

$$(k_2(P) < 0)$$

   Por lo que las secciones de esta aproximación por planos perpendiculares al eje OZ, son rectas paralelas (reales o imaginarias).

   (c) $k_1(P) = k_2(P) = 0$ Punto plano

   En este caso la aproximación cuadrática es el plano: $z = 0$.

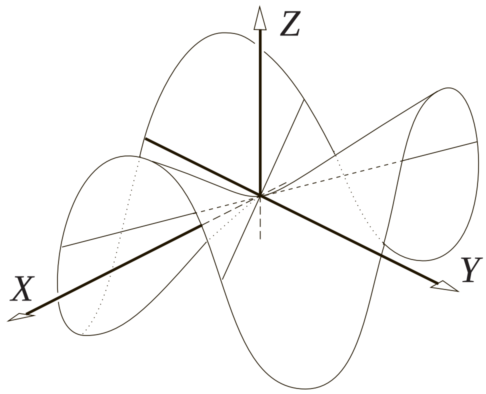
Si se quiere dar una descripción geométrica más detallada de la superficie en un punto plano, es necesario obtener más términos en (10.2),

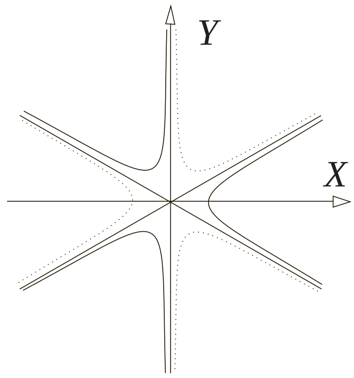
$$f(x,y) \simeq \frac{1}{6}(f'''_{xxx}(0,0)x^3 + 3f''_{xx}(0,0)f'_y(0,0)x^2y + 3f'_x(0,0)f''_{yy}(0,0)xy^2 + f'''_{yyy}(0,0)y^3).$$

Es el caso, por ejemplo, de *la silla de montar de mono*, superficie de ecuación

$$z = x(x^2 - 3y^2).$$

En el dibujo representamos las proyecciones sobre el plano XY de dos secciones por planos perpendiculares al eje OZ, $z = \pm c$, con trazo continuos y punteados, respectivamente.





10.4 Segunda forma fundamental

Definición 10.22 *Se denomina* segunda forma fundamental *de una superficie* $\mathcal{M}$ *al campo de tensores II de tipo (0,2) definido en cada punto P de* $\mathcal{M}$ *por la aplicación bilineal simétrica*

$$II_P : T_P(\mathcal{M}) \times T_P(\mathcal{M}) \to I\!R \qquad II_P(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = S_P(\vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}}, \quad \forall\, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in T_P(\mathcal{M}).$$

Si $\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3 \quad (u^1, u^2) \mapsto \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$, es una representación paramétrica local de una superficie de normal unitaria $\vec{\mathbf{N}}$, la segunda forma fundamental se expresa por

$$II = \sum_{i,j=1}^{2} L_{ij} du^i \otimes du^j.$$

Las L_{ij} son las componentes (o coeficientes) de la segunda forma fundamental, que vienen dadas por

$$L_{ij}(u^1, u^2) = II(\vec{\mathbf{x}}_i(u^1, u^2), \vec{\mathbf{x}}_j(u^1, u^2)) = S(\vec{\mathbf{x}}_i(u^1, u^2)) \cdot \vec{\mathbf{x}}_j(u^1, u^2).$$

Si la representación paramétrica $\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3$ es de clase C^n la segunda forma fundamental es diferenciable de clase C^{n-2}, es decir, sus coeficientes son diferenciables de clase C^{n-2}.

Teniendo presente la simetría de los coeficientes y la definición de producto simétrico, podemos expresar la segunda forma fundamental como sigue:

$$\begin{aligned} II &= L_{11} du^1 \otimes du^1 + L_{12} du^1 \otimes du^2 + L_{21} du^2 \otimes du^1 + L_{22} du^2 \otimes du^2 = \\ &= L_{11} du^1 \otimes du^1 + L_{12}(du^1 \otimes du^2 + du^2 \otimes du^1) + L_{22} du^2 \otimes du^2 = \\ &= L_{11} du^1 \odot du^1 + 2L_{12} du^1 \odot du^2 + L_{22} du^2 \odot du^2. \end{aligned}$$

$$\boxed{II = L_{11}(du^1)^2 + 2L_{12} du^1\, du^2 + L_{22}(du^2)^2}$$

Cálculo de la curvatura de Gauss y curvatura media

Vamos a expresar la curvatura de Gauss y la curvatura media en función de los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales de una superficie $\mathcal{M}$. Daremos, previamente unas expresiones generales de ellas en términos del operador forma.

Proposición 10.23 *Sean $\vec{v}, \vec{w} \in T_P(\mathcal{M})$, $P \in \mathcal{M} \subset I\!R^3$, vectores linealmente independientes, entonces:*

$$S_P(\vec{v}) \times S_P(\vec{w}) = K(P)\,\vec{v} \times \vec{w},$$

$$S_P(\vec{v}) \times \vec{w} + \vec{v} \times S_P(\vec{w}) = 2H(P)\,\vec{v} \times \vec{w}.$$

Demostración.- Existen $\lambda, \xi, \eta, \zeta \in I\!R$ tales que

$$S_P(\vec{v}) = \lambda\,\vec{v} + \xi\,\vec{w} \qquad S_P(\vec{w}) = \eta\,\vec{v} + \zeta\,\vec{w}$$

$$K(P) = det\,S_P = \lambda\zeta - \xi\eta \qquad H(P) = \frac{1}{2} traza\,S_P = \frac{1}{2}(\lambda + \zeta)$$

$$S_P(\vec{v}) \times S_P(\vec{w}) = (\lambda\,\vec{v} + \xi\,\vec{w}) \times (\eta\,\vec{v} + \zeta\,\vec{w}) = (\lambda\zeta - \xi\eta)\vec{v} \times \vec{w} = K(P)\,\vec{v} \times \vec{w}$$

$$\begin{aligned} S_P(\vec{v}) \times \vec{w} + \vec{v} \times S_P(\vec{w}) &= \\ = \quad (\lambda\,\vec{v} + \xi\,\vec{w}) \times \vec{w} + \vec{v} \times (\eta\,\vec{v} + \zeta\,\vec{w}) &= \lambda\,\vec{v} \times \vec{w} + \zeta\,\vec{v} \times \vec{w} = 2H(P)\,\vec{v} \times \vec{w}. \end{aligned}$$

□

Utilizando la Proposición 10.23 anterior y la identidad de Lagrange (ver página 179) obtenemos inmediatamente:

Proposición 10.24 *Sean $V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ en una superficie orientada $\mathcal{M}$, se tiene*

$$K = \frac{\begin{vmatrix} S(V)\cdot V & S(V)\cdot W \\ S(W)\cdot V & S(W)\cdot W \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} V\cdot V & V\cdot W \\ W\cdot V & W\cdot W \end{vmatrix}}$$

$$H = \frac{\begin{vmatrix} S(V)\cdot V & S(V)\cdot W \\ W\cdot V & W\cdot W \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V\cdot V & V\cdot W \\ S(W)\cdot V & S(W)\cdot W \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} V\cdot V & V\cdot W \\ W\cdot V & W\cdot W \end{vmatrix}}$$

□

En particular, tomando como campos de vectores los asociados a una representación paramétrica local, se tienen las siguientes expresiones para la curvatura de Gauss y curvatura media:

Proposición 10.25 *Si $\vec{\mathbf{x}} : A \subset I\!R^2 \to I\!R^3$ es una representación paramétrica local de una superficie $\mathcal{M}$, se tienen las siguientes expresiones de la curvatura de Gauss y de la curvatura media:*

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \qquad H = \frac{g_{22}L_{11} - 2g_{12}L_{12} + g_{11}L_{22}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)},$$

estando dados los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales, respectivamente, por

$$\begin{array}{ll} g_{11} = \vec{\mathbf{x}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}_1 & L_{11} = S(\vec{\mathbf{x}}_1) \cdot \vec{\mathbf{x}}_1 = -\vec{\mathbf{N}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}_1 = \vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_{11} \\ g_{12} = \vec{\mathbf{x}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}_2 & L_{12} = S(\vec{\mathbf{x}}_1) \cdot \vec{\mathbf{x}}_2 = -\vec{\mathbf{N}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}_2 = \vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_{12} \\ g_{22} = \vec{\mathbf{x}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}}_2 & L_{22} = S(\vec{\mathbf{x}}_2) \cdot \vec{\mathbf{x}}_2 = -\vec{\mathbf{N}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}}_2 = \vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_{22} \end{array}$$

Demostración.- La expresión de los coeficientes de la segunda forma fundamental surgen de que, para $i, j = 1, 2$,

$$\vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_j = 0 \;\Rightarrow \vec{\mathbf{N}}_i \cdot \vec{\mathbf{x}}_j + \vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_{ij} = 0 \;\Rightarrow -S(\vec{\mathbf{x}}_i) \cdot \vec{\mathbf{x}}_j = -\vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_{ij}.$$

□

10.5 Curvas especiales sobre superficies

Líneas de curvatura

Definición 10.26 *Una curva regular $\mathcal{C}$ en una superficie $\mathcal{M} \subset I\!R^3$ es una curva principal (o* línea de curvatura*) cuando su vector tangente en cada punto corresponde a una dirección principal.*

Nota 10.27 Hay exactamente dos líneas de curvatura que pasan por cada punto no umbilical de $\mathcal{M}$ y se cortan ortogonalmente. En un punto umbilical toda dirección es principal.

Proposición 10.28 *Sea $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3$ una curva regular $\mathcal{C}$ en $\mathcal{M}$ y sea $\vec{\mathbf{N}}$ un campo de vectores normal y unitario restringido a $\mathcal{C}$. Entonces:*

La curva $\mathcal{C}$ es una línea de curvatura si y sólo si $\vec{\mathbf{N}}\,'$ y $\vec{\alpha}\,'$ son colineales en cada punto.

La curvatura principal en la dirección de $\vec{\alpha}\,'$ es $(\vec{\alpha}\,'' \cdot \vec{\mathbf{N}}) \big/ (\vec{\alpha}\,' \cdot \vec{\alpha}\,')$.

Demostración.-
$$S(\vec{\alpha}\,') = -D_{\vec{\alpha}\,'}\vec{\mathbf{N}} = -\frac{d\vec{\mathbf{N}}(\vec{\alpha}(t))}{dt} = -\vec{\mathbf{N}}\,'.$$

Así $\vec{\mathbf{N}}\,' \,/\!/\, \vec{\alpha}\,' \quad \Leftrightarrow S(\vec{\alpha}\,') \,/\!/\, \vec{\alpha}\,' \quad \Leftrightarrow \vec{\alpha}\,'$ es una dirección principal.

La curvatura normal será:

$$k\left(\frac{\vec{\alpha}\,'}{\|\vec{\alpha}\,'\|}\right) = \frac{S(\vec{\alpha}\,')\cdot\vec{\alpha}\,'}{\vec{\alpha}\,'\cdot\vec{\alpha}\,'} = \frac{-\vec{\mathbf{N}}\,'\cdot\vec{\alpha}\,'}{\vec{\alpha}\,'\cdot\vec{\alpha}\,'} = \frac{\vec{\mathbf{N}}\cdot\vec{\alpha}\,''}{\vec{\alpha}\,'\cdot\vec{\alpha}\,'}$$

□

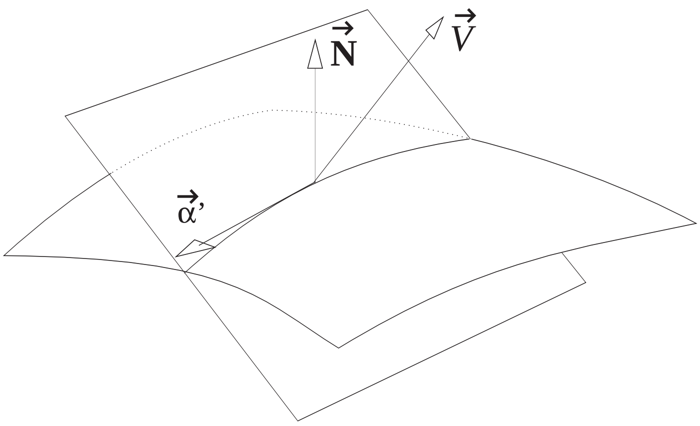
Nota 10.29 En la demostración de esta proposición se ha obtenido una expresión muy útil para determinar la curvatura normal en cualquier dirección, dada por un vector tangente a la superficie $\vec{v}$, no necesariamente unitario, a saber:

$$k\left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) = \frac{II(\vec{v},\vec{v})}{I(\vec{v},\vec{v})}$$

Además, se obtiene que $\vec{\mathbf{N}}\,' = -k(\vec{\alpha}\,'/\|\vec{\alpha}\,'\|)\vec{\alpha}\,'$, que se conoce como la fórmula de Olinde Rodrigues.

Proposición 10.30 *Sea $\mathcal{C}$ la curva que resulta de cortar una superficie $\mathcal{M}$ por un plano (sección plana en $\mathcal{M}$), si el plano que contiene a la curva forman un ángulo constante con la superficie a lo largo de $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C}$ es una línea de curvatura en $\mathcal{M}$.*

Demostración.-



Sean $\vec{\mathbf{N}}$ y V los campos de vectores unitarios y normales a $\mathcal{M}$ y al plano π a lo largo de $\mathcal{C}$, $\vec{\alpha} : I \to I\!R^3$ la representación paramétrica de la curva $\mathcal{C}$.

Como $\vec{\mathbf{N}}\cdot V = cte$ y $\vec{\mathbf{N}}\cdot\vec{\mathbf{N}} = 1$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{\mathbf{N}}\,'\cdot V = 0 \Rightarrow S(\vec{\alpha}\,')\cdot V = 0 \\ \vec{\mathbf{N}}\,'\cdot\vec{\mathbf{N}} = 0 \Rightarrow S(\vec{\alpha}\,')\cdot\vec{\mathbf{N}} = 0 \\ \text{Si } \vec{\mathbf{N}} \text{ y } V \text{ son independientes} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$S(\vec{\alpha}\,')\ //\ \vec{\alpha}\,' \Rightarrow \mathcal{C}$ línea de curvatura.

Si $\vec{\mathbf{N}} = \pm V \Rightarrow \vec{\mathbf{N}}\,' = \vec{0} \Rightarrow S(\vec{\alpha}\,') = \vec{0} \Rightarrow \mathcal{C}$ línea de curvatura.

Ejemplo 10.31 Los meridianos y paralelos de una superficie de revolución son líneas de curvatura. El Ejercicio 192 indica cómo obtener las líneas de curvatura en una superficie.

Líneas asintóticas

Definición 10.32 *Se llama* dirección asintótica *a la dirección tangente a $\mathcal{M} \subset I\!R^3$ en la que la curvatura normal es cero.*

Proposición 10.33 *En un punto P de una superficie $\mathcal{M}$ en $I\!R^3$ se tienen las siguientes situaciones según el valor de la curvatura de Gauss:*

1. *Si $K(P) > 0$, no hay direcciones asintóticas.*
2. *Si $K(P) < 0$, hay exáctamente dos direcciones asintóticas en P, que quedan bisecadas por las direcciones principales con ángulo θ tal que*

$$tag^2\theta = -\frac{k_1(P)}{k_2(P)}.$$

3. *Si $K(P) = 0$, entonces toda dirección es asintótica si P es un punto plano. Si el punto es parabólico, hay exáctamente una dirección asintótica, que es también principal.*

Demostración.- Utilizaremos la fórmula de Euler (10.1)

$$k(\theta) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \operatorname{sen}^2\theta$$

1) Si $K > 0$, $k(\theta)$ nunca se anula.
2) Si $K < 0$, k_1 y k_2 tienen signos opuestos, y podemos resolver la ecuación

$$0 = k_1 \cos^2\theta + k_2 \operatorname{sen}^2\theta$$

para obtener las dos direcciones asintóticas.
3) Si P es un punto plano, $k_1 = k_2 = 0$, entonces $k(\theta) = 0$, $\forall\theta$.
Si $k_1 \neq 0$ y $k_2 = 0$, entonces $k(\theta) = k_1 \cos^2\theta$.

$$k(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

la curvatura normal se anula en la dirección principal $\vec{v}_2$. □

Definición 10.34 *Una curva regular $\mathcal{C}$ en una superficie $\mathcal{M}$ se dice que es una* línea asintótica *cuando es tangente a una dirección asintótica en cualquiera de sus puntos.*

El Ejercicio 192 da la ecuación diferencial que permite determinar las líneas asintóticas. De la Proposición 10.6 surge inmediatamente:

Proposición 10.35 *Una curva $\vec{\alpha} : I \to \mathcal{M} \subset I\!R^3$ es una línea asintótica si y sólo si $\vec{\alpha}''$ es tangente a $\mathcal{M}$, (es decir, su plano osculador es tangente a la superficie).*

□

Ejemplo 10.36 *La ecuación diferencial curvilínea de la curvas asíntoticas, distintas de las generatrices, sobre una superficie reglada no desarrollable*

$$\vec{\mathbf{x}}(s,v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{\beta}(s) \qquad (\|\vec{\alpha}'\| = 1,\ \|\beta\| = 1,\ [\vec{t}\vec{\beta}\vec{\beta}'] \neq 0)$$

tiene la forma de una ecuación de Riccati (§4.5):

$$\frac{dv}{ds} = A(s)v^2 + B(s)v + C(s).$$

Las líneas asintóticas son curvas que satisfacen (ver Ejercicio 192) a la ecuación diferencial

$$L_{11}(ds)^2 + 2L_{12}ds\,dv + L_{22}(dv)^2 = 0.$$

Para calcular los coeficientes L_{ij} necesitamos:

$$\vec{\mathbf{x}}_s = \vec{t} + v\vec{\beta}', \quad \vec{\mathbf{x}}_v = \vec{\beta}, \quad \vec{\mathbf{x}}_{ss} = -\kappa\vec{n} + v\vec{\beta}'', \quad \vec{\mathbf{x}}_{sv} = \vec{\beta}', \quad \vec{\mathbf{x}}_{vv} = 0.$$

$$\vec{\mathbf{N}}_s = \frac{\vec{\mathbf{x}}_s \times \vec{\mathbf{x}}_v}{\|\vec{\mathbf{x}}_s \times \vec{\mathbf{x}}_v\|} = \frac{\vec{t}\times\vec{\beta} + v\vec{\beta}'\times\vec{\beta}}{\sqrt{1 + 2v\vec{t}\cdot\vec{\beta}' + v^2\vec{\beta}'\cdot\vec{\beta}'}},$$

ya que

$$(\vec{t}\times\vec{\beta})\cdot(\vec{\beta}'\times\vec{\beta}) = \begin{vmatrix} \vec{t}\cdot\vec{\beta}' & \vec{t}\cdot\vec{\beta} \\ \vec{\beta}\cdot\vec{\beta}' & \vec{\beta}\cdot\vec{\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{t}\cdot\vec{\beta}' & \vec{t}\cdot\vec{\beta} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{t}\cdot\vec{\beta}'.$$

$$(\vec{\beta}'\times\vec{\beta})\cdot(\vec{\beta}'\times\vec{\beta}) = \begin{vmatrix} \vec{\beta}'\cdot\vec{\beta}' & \vec{\beta}'\cdot\vec{\beta} \\ \vec{\beta}\cdot\vec{\beta}' & \vec{\beta}\cdot\vec{\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{t}\cdot\vec{\beta}' & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\beta}'\cdot\vec{\beta}'.$$

$$\begin{aligned} L_{11} = \vec{\mathbf{N}}\cdot\vec{\mathbf{x}}_{ss} &= \frac{-\kappa[\vec{t}\,\vec{\beta}\,\vec{n}] + v[\vec{t}\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}''] - \kappa v[\vec{\beta}'\,\vec{\beta}\,\vec{n}] + v^2[\vec{\beta}'\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}'']}{\sqrt{1 + 2v\vec{t}\cdot\vec{\beta}' + v^2\vec{\beta}'\cdot\vec{\beta}'}} = \\ &= \frac{[\vec{\beta}'\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}'']v^2 + ([\vec{t}\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}''] + \kappa[\vec{\beta}'\,\vec{\beta}\,\vec{n}])v + \kappa[\vec{t}\,\vec{n}\,\vec{\beta}]}{\sqrt{1 + 2v\vec{t}\cdot\vec{\beta}' + v^2\vec{\beta}'\cdot\vec{\beta}'}}, \\ L_{12} = \vec{\mathbf{N}}\cdot\vec{\mathbf{x}}_{sv} &= \frac{[\vec{t}\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}'] + v[\vec{\beta}'\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}']}{\sqrt{1 + 2v\vec{t}\cdot\vec{\beta}' + v^2\vec{\beta}'\cdot\vec{\beta}'}} = \frac{[\vec{t}\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}']}{\sqrt{1 + 2v\vec{t}\cdot\vec{\beta}' + v^2\vec{\beta}'\cdot\vec{\beta}'}}, \\ L_{22} = \vec{\mathbf{N}}\cdot\vec{\mathbf{x}}_{vv} &= 0. \end{aligned}$$

Entonces las líneas asintóticas vienen dadas por el producto de las ecuaciones diferenciales:

$$ds\Big(\big([\vec{\beta}'\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}'']v^2 + ([\vec{t}\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}''] + \kappa[\vec{\beta}'\,\vec{\beta}\,\vec{n}])v + \kappa[\vec{t}\,\vec{n}\,\vec{\beta}]\big)ds + 2[\vec{t}\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}']dv\Big) = 0$$

Luego las líneas asintóticas son, por una parte, las que satisfacen $ds = 0$, o sea, $s = cte.$ (que son las generatrices rectilíneas), y por otra las que se deducen de

$$\frac{dv}{ds} = \frac{[\vec{\beta}'\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}'']}{2[\vec{t}\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}']}v^2 + \frac{[\vec{t}\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}''] + \kappa[\vec{\beta}'\,\vec{\beta}\,\vec{n}]}{2[\vec{t}\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}']}v + \frac{\kappa[\vec{t}\,\vec{n}\,\vec{\beta}]}{2[\vec{t}\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}']},$$

con $[\vec{t}\,\vec{\beta}\,\vec{\beta}'] \neq 0$, al no ser la superficie desarrollable. Se tiene pues que las líneas asintóticas, no rectilíneas, satisfacen a una ecuación de Riccati:

$$\frac{dv}{ds} = A(s)v^2 + B(s)v + C(s).$$

Si, como caso particular, consideramos la superficie reglada generada por las normales principales a una curva, es decir $\vec{\beta} = \vec{n}$, resulta:

$$A(s) = \frac{\kappa\tau' - \tau\kappa'}{2\tau}, \qquad B(s) = \frac{\tau'}{2\tau}, \qquad C(s) = 0.$$

En consecuencia, en la superficie reglada generada por las normales principales a una hélice circular (helicoide), las curvas asintóticas, a parte de las generatrices, satisfacen a

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\kappa\tau' - \tau\kappa'}{2\tau} v^2 + \frac{\tau'}{2\tau} v,$$

y como en una hélice circular se tiene $\kappa = cte.$ y $\tau = cte.$, se tiene que $v' = 0$, o sea $v = cte.$ Que son hélice circulares concéntricas con la dada.

Líneas conjugadas

Definición 10.37 *Dados dos vectores tangentes $\vec{v}$ y $\vec{w}$ a una superficie $\mathcal{M}$ se dice que la dirección dada $\vec{v}$ es* conjugada *de la dirección dada por $\vec{w}$ si $S(\vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$.*

Nota 10.38 De la simetría del operador forma S, se tiene también $S(\vec{w}) \cdot \vec{v} = 0$, y así, decimos simplemente que las direcciones $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son conjugadas.

Las direcciones principales obviamente son conjugadas. Y las direcciones asintóticas son autoconjugadas.

Proposición 10.39 *En cada punto elíptico o hiperbólico de una superficie cada dirección tiene una dirección conjugada.*

Demostración.- Si $\vec{v}$ es un vector tangente en la dirección dada como $S(\vec{v}) \neq \vec{0}$, existe una vector tangente $\vec{w}$ que es ortogonal a $S(\vec{v})$. □

Definición 10.40 *Dos familias de curvas en una superficie se dice que son* conjugadas *si en cada punto de contacto sus direcciones son conjugadas.*

Nota 10.41 Los tipos de curvas especiales sobre una superficie definidos hasta ahora en esta sección tienen la siguiente interpretación geométrica en términos de teoría de cónicas que justifican sus denominaciones:

Si en el plano tangente en un punto P a una superficie consideramos un sistema de referencias con origen en P y ejes los determinados por las direcciones principales, y si en la fórmula de Euler (10.1),

$$k(\vec{u}) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \operatorname{sen}^2\theta,$$

ponemos $1/\rho^2 = |k(\vec{u})|$, $\xi = \rho \cos\theta$, $\eta = \rho \operatorname{sen}\theta$, se tiene la ecuación de una cónica (denominada *indicatriz de Dupin*)

$$\pm 1 = k_1\xi^2 + k_2\eta^2.$$

Pues bien, las direcciones principales son los ejes de esta cónica; las direcciones asintóticas vienen determinadas por las asíntotas; y las direcciones conjugadas corresponden a las de la cónica.

Líneas geodésicas

Definición 10.42 *Una curva $\vec{\alpha} : I \to \mathcal{M} \subset I\!R^3$ es una* geodésica *de $\mathcal{M}$ cuando $\vec{\alpha}\,''$ es normal a $\mathcal{M}$.*

Proposición 10.43 *Si $\vec{\alpha}$ es una geodésica en $\mathcal{M}$, entonces $\|\vec{\alpha}\,'\| = cte$.*

Demostración.- $\vec{\alpha}$ es geodésica $\Rightarrow \vec{\alpha}\,' \cdot \vec{\alpha}\,'' = 0 \Rightarrow \vec{\alpha}\,' \cdot \vec{\alpha}\,' = cte.$ □

Proposición 10.44 *Si $\vec{\alpha}$ es una geodésica con parametrización longitud de arco, entonces*

$$S(\vec{t}) = \kappa\vec{t} - \tau\vec{b}.$$

Demostración.- $\ddot{\vec{\alpha}} = \kappa\vec{n} = \kappa\vec{\mathbf{N}} \quad \Rightarrow \quad S(\vec{t}) = -\dot{\vec{\mathbf{N}}} = -\dot{\vec{n}} = \kappa\vec{t} - \tau\vec{b}.$ □

Ejemplo 10.45

1. Las geodésicas en el *plano* son las *rectas*.

   Sea $\vec{u}$ el vector director del plano y $\vec{\alpha}$ una geodésica contenida en él, entonces $\vec{\alpha}\,' \cdot \vec{u} = 0$.

   $$\vec{\alpha}\,'' \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\alpha}\,''//\vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha}\,'' = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha}(t) = \vec{a}t + \vec{b}.$$

   El recíproco es inmediato.

2. Las geodésicas en la *esfera* son las *circunferencias máximas*.

   Sea $\vec{\alpha}$ una geodésica con parametrización natural en una esfera de radio r

   $$S(\vec{t}) = \kappa\vec{t} - \tau\vec{b} \quad \text{y} \quad S(\vec{t}) = \frac{1}{r}\vec{t} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{1}{r}, \quad \tau = 0,$$

   $\vec{\alpha}$ es una circunferencia máxima.

   Recíprocamente, en una circunferencia máxima $\vec{\alpha}$ en la esfera la $\ddot{\vec{\alpha}}$ apunta hacia su centro, que es el centro de la esfera, luego $\ddot{\vec{\alpha}}//\vec{\mathbf{N}}$.

3. Geodésicas en el *cilindro circular*.

   Una curva en el cilindro tendrá de ecuación $\vec{\alpha}(t) = (r \cos\theta(t), r \operatorname{sen}\theta(t), h(t))$.

   $$\text{Si es geodésica:} \quad \Rightarrow \begin{cases} \vec{\alpha}\,''//\vec{\mathbf{N}} \Rightarrow h''(t) = 0 \Rightarrow h(t) = ct + d \\ \vec{\alpha}\,' \cdot \vec{\alpha}\,' = cte \Rightarrow r^2\theta\,'(t)^2 + h'(t)^2 = cte \end{cases}$$

   Luego $\theta\,'(t)^2 = cte \Rightarrow \theta(t) = at + b$, por tanto

   $$\vec{\alpha}(t) = (r \cos(at + b), r \operatorname{sen}(at + b), ct + d)$$

   Si $a \neq 0$ y $c \neq 0$, $\vec{\alpha}$ es una hélice; si $a = 0$, $\vec{\alpha}$ es una generatriz; y si $c = 0$, $\vec{\alpha}$ es una circunferencia.

TEMA XI

Teorema fundamental de superficies

Como en el caso del teorema fundamental de la teoría de curvas, según el cual la curvatura y la torsión determinan la curva, queremos demostrar ahora que la primera y segunda formas fundamentales determinan la superficie salvo su posición en el espacio. Para ello usaremos un método similar al utilizado en el caso de curvas en $I\!R^3$, pero en vez del triedro de Frenet de una curva consideraremos una referencia definida por $\vec{\mathbf{x}}_1,\ \vec{\mathbf{x}}_2,\ \vec{\mathbf{N}}$ en cada punto P de una superficie $\mathcal{M}$ (denominada referencia de Darboux de $\mathcal{M}$).

11.1 Derivada covariante

Empecemos introduciendo la derivada covariante en una superficie, a partir de la derivada covariante (§ A.7) y del producto euclídeo (§ A.1) en $I\!R^3$.

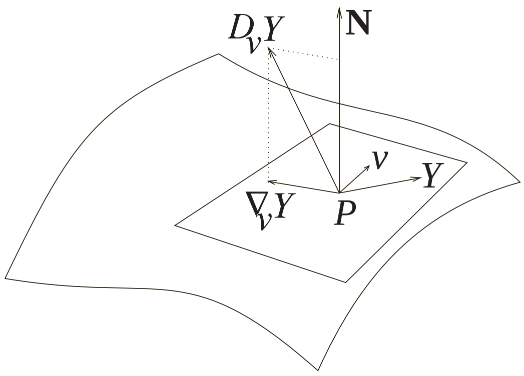
Consideremos una superficie $\mathcal{M} \subset I\!R^3$, un punto P en $\mathcal{M}$ y un vector tangente $\vec{v} \in T_P(\mathcal{M})$. Ahora supondremos que Y es un campo de vectores tangente a $\mathcal{M}$, definido en un entorno abierto de P. Entonces, $D_{\vec{v}}Y$ es un vector en $I\!R^3$, que descomponemos, de forma única en la parte tangente más la parte normal a la superficie, como sigue

$$D_{\vec{v}}Y = \nabla_{\vec{v}}Y + \alpha\,\vec{\mathbf{N}}_P,$$

donde $\nabla_{\vec{v}}Y \in T_P(\mathcal{M})$.

Primeramente, notemos que como (ver Proposición A.12)

$$0 = \vec{v}(\vec{\mathbf{N}} \cdot Y) = D_{\vec{v}}\vec{\mathbf{N}} \cdot Y_P + \vec{\mathbf{N}}_P \cdot D_{\vec{v}}Y,$$



se tiene

$$\alpha = \vec{\mathbf{N}}_P \cdot D_{\vec{v}}Y = -D_{\vec{v}}\vec{\mathbf{N}} \cdot Y_P = S(\vec{v}) \cdot Y_P = II(\vec{v}, Y_P).$$

Tenemos entonces la llamada Ecuación de Gauss:

$$D_{\vec{v}}Y = \nabla_{\vec{v}}Y + II(\vec{v}, Y_P)\vec{\mathbf{N}}_P.$$

Y ésta puede ser extendida a campos de vectores tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$:

$$\boxed{D_X Y = \nabla_X Y + II(X,Y)\vec{\mathbf{N}}} \qquad (11.1)$$

Definición 11.1 $\nabla_{\vec{v}}$ *se denomina* derivada covariante *con respecto a* $\vec{v}$.

Proposición 11.2 *El operador* ∇ *(derivada covariante o conexión de Levi-Civita) tiene las siguientes propiedades:*

$$\begin{array}{lrcl}
1) & \nabla_X(\lambda Y_1 + \mu Y_2) & = & \lambda\nabla_X Y_1 + \mu\nabla_X Y_2 \\
2) & \nabla_{\lambda X_1 + \mu X_2} Y & = & \lambda\nabla_{X_1} Y + \mu\nabla_{X_2} Y \\
3) & \nabla_X(fY) & = & X(f)Y + f\nabla_X Y \\
4) & \nabla_{fX} Y & = & f\nabla_X Y \\
5) & X(Y_1 \cdot Y_2) & = & (\nabla_X Y_1) \cdot Y_2 + Y_1 \cdot (\nabla_X Y_2) \\
6) & \nabla_X Y - \nabla_Y X & = & [X,Y]
\end{array}$$

para todo $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$.

Demostración.- Basta tener presente las respectivas propiedades de la derivada covariante en $\mathbb{R}^3$ (ver Proposición A.12), la bilinealidad y simetría de la segunda forma fundamental, así como la definición de corchete dada en el Ejercicio 12. □

Componentes locales de la derivada covariante

Sea $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ una representación paramétrica local de $\mathcal{M}$. Expresamos las derivadas covariantes de los campos de vectores básicos en función de ellos mismos, por las expresiones:

$$\nabla_{\vec{\mathbf{x}}_i}\vec{\mathbf{x}}_j = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \vec{\mathbf{x}}_k.$$

A los coeficientes Γ_{ij}^k se les llama símbolos de Christoffel de segunda especie o coeficientes de la conexión de Levi–Civita.

La ecuación de Gauss se escribe

$$\boxed{\vec{\mathbf{x}}_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \vec{\mathbf{x}}_k + L_{ij}\vec{\mathbf{N}}}$$

Los campos de vectores X, Y y $\nabla_X Y$ tangentes a $\mathcal{M}$ se expresan localmente por

$$X = \sum_{i=1}^{2} X^i \vec{\mathbf{x}}_i, \qquad Y = \sum_{i=1}^{2} Y^i \vec{\mathbf{x}}_i.$$

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \sum_{i=1}^{2} X^i \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \vec{\mathbf{x}}_j + \sum_{j=1}^{2} Y^j \nabla_{\vec{\mathbf{x}}_i} \vec{\mathbf{x}}_j \right) = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{2} X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \vec{\mathbf{x}}_k.\end{aligned}$$

Así la derivada covariante está determinada por los coeficientes Γ_{ij}^k.

Nota 11.3 Dado un campo de vectores tangente a $\mathcal{M}$, $X = \sum_{i=1}^{2} X^i \vec{\mathbf{x}}_i$, sus derivadas parciales respecto a u^1, u^2, no son, en general, vectores tangentes a $\mathcal{M}$ [(1)]. Sin embargo, sí son componentes de un vector tangente a $\mathcal{M}$, denominado derivada covariante de X, las siguientes

$$X^i_{\,;j} = \frac{\partial X^i}{\partial u^j} + \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{jk}^i X^k.$$

Los símbolos de Christoffel de segunda especie se transforman respecto de dos representaciones paramétricas de acuerdo con la ley:

$$\widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \sum_{i,j,k=1}^{2} \Gamma_{jk}^i \frac{\partial \tilde{u}^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^\beta} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^\gamma} - \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}^\alpha}{\partial u^j \partial u^k} \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^\beta} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^\gamma} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2)$$

De donde se desprende que dichos coeficientes Γ_{ij}^k no son las componentes de un campo tensorial de tipo (1,2), ya que no verifican las relaciones (A9.1) que dan la condición para que lo sean.

(1) $X^i_j = \dfrac{\partial X^i}{\partial u^j}$ no son, en general, las componentes e un campo de tensores de tipo $(1, 1)$

11.2 Curvatura

A diferencia de las derivadas usuales, las derivadas covariantes de orden superior no son simétricas [(2)], lo cual nos lleva a definir el siguiente operador

$$R(X,Y) : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \to \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \qquad X,Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

el cual se denomina curvatura de ∇.

Utilizando la definición del operador curvatura R y las propiedades de la derivada covariante ∇, tenemos:

Proposición 11.4 *Para toda función diferenciable f sobre $\mathcal{M}$ y $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ campos de vectores diferenciables sobre $\mathcal{M}$, se verifica*

$$R(fX,Y)Z = R(X,fY)Z = R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z.$$

□

Proposición 11.5 *La derivada covariante y su curvatura sólo dependen de la primera forma fundamental.*

Demostración.- Para calcular los coeficientes Γ^k_{ij}, relativos a una representación paramétrica $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1,u^2)$, tomemos $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ arbitrarios, entonces

$$X(Y\cdot Z) = (\nabla_X Y)\cdot Z + Y\cdot(\nabla_X Z)$$
$$Y(Z\cdot X) = (\nabla_Y Z)\cdot X + Z\cdot(\nabla_Y X)$$
$$Z(X\cdot Y) = (\nabla_Z X)\cdot Y + X\cdot(\nabla_Z Y)$$

Restando la segunda igualdad de la suma de las otras dos, resulta

$$\begin{aligned} & X(Y\cdot Z) - Y(Z\cdot X) + Z(X\cdot Y) = \\ &= \ (\nabla_X Y - \nabla_Y X)\cdot Z - (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y)\cdot X + (\nabla_X Z - \nabla_Z X)\cdot Y + \\ &\quad +(\nabla_Z X)\cdot Y + (\nabla_Z X)\cdot Y \end{aligned}$$

De donde se deduce la llamada fórmula de Koszul:

$$2(\nabla_Z X)\cdot Y = X(Y\cdot Z) - Y(Z\cdot X) + Z(X\cdot Y) - [X,Y]\cdot Z + [Y,Z]\cdot X - [X,Z]\cdot Y$$

Tomando, en particular, $X = \vec{\mathbf{x}}_i, \ Y = \vec{\mathbf{x}}_j \ Z = \vec{\mathbf{x}}_k, \ (i,j,k \in \{1,2\})$ la fórmula de Koszul queda

$$2\sum_{h=1}^{2} \Gamma^h_{ki}\, g_{hj} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{kij}.$$

A los coeficientes Γ_{ijk} se denominan símbolos de Christoffel de primera especie.

De la igualdad $2\sum_{h=1}^{2} \Gamma^h_{ij}\, g_{kh} = \Gamma_{ijk}$, se sigue que $\Gamma^k_{ij} = \dfrac{1}{2}\sum_{h=1}^{2} \Gamma_{ijh}\, g^{hk}$.

Es decir:

(2) En $I\!R^n$ se tiene: $D_X D_Y Z - D_Y D_X Z = D_{[X,Y]}Z$.

$$\boxed{\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{2} g^{hk}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^h}\right)}$$

Con lo que hemos probado que “la derivada covariante está completamente determinada por la primera forma fundamental”.

Los coeficientes Γ_{ij}^k de la conexión de Levi-Civita sobre $\mathcal{M}$, verifican la siguiente propiedad de simetría:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \qquad (i,j,k = 1,2)$$

Ahora, para ver que también la curvatura sólo depende de la primera forma fundamental, expresemos ésta en función de sus coeficientes:

$$R(\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{x}}_j)\vec{\mathbf{x}}_k = \sum_{h=1}^{2} R_{ijk}^h \vec{\mathbf{x}}_h.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
R(\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{x}}_j)\vec{\mathbf{x}}_k &= \nabla_{\vec{\mathbf{x}}_i}\left(\sum_{h=1}^{2}\Gamma_{jk}^h \vec{\mathbf{x}}_h\right) - \nabla_{\vec{\mathbf{x}}_j}\left(\sum_{h=1}^{2}\Gamma_{ik}^h \vec{\mathbf{x}}_h\right) = \\
&= \sum_{h=1}^{2}\left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial u^i}\vec{\mathbf{x}}_h + \Gamma_{jk}^h \sum_{\ell=1}^{2}\Gamma_{ih}^\ell \vec{\mathbf{x}}_\ell - \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial u^j}\vec{\mathbf{x}}_h - \Gamma_{ik}^h \sum_{\ell=1}^{2}\Gamma_{jh}^\ell \vec{\mathbf{x}}_\ell\right) = \\
&= \sum_{h=1}^{2}\left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial u^j} + \sum_{\ell=1}^{2}(\Gamma_{jk}^\ell \Gamma_{i\ell}^h) - \sum_{\ell=1}^{2}(\Gamma_{ik}^\ell \Gamma_{j\ell}^h)\right)\vec{\mathbf{x}}_h.
\end{aligned}$$

$$\boxed{R_{ijk}^h = \frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial u^j} + \sum_{\ell=1}^{2}(\Gamma_{jk}^\ell \Gamma_{i\ell}^h - \Gamma_{ik}^\ell \Gamma_{j\ell}^h)}$$

□

La ecuación de Gauss (11.1) nos permite obtener una importante relación entre la derivada covariante (y por tanto, entre la primera forma fundamental) y la segunda forma fundamental de una superficie.

Proposición 11.6 *Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ (campos de vectores diferenciables tangentes a $\mathcal{M}$), se tienen las siguientes relaciones:*

$$R(X,Y)Z = II(Y,Z)\,S(X) - II(X,Z)\,S(Y). \tag{11.2}$$

$$S([X,Y]) = \nabla_X S(Y) - \nabla_Y S(X). \tag{11.3}$$

Demostración.- Hallando la derivada direccional en $I\!R^3$, respecto a X, de los dos miembros de la ecuación de Gauss (11.1),

$$D_Y Z = \nabla_Y Z + II(Y,Z)\vec{\mathbf{N}},$$

resulta:

$$\begin{aligned} D_X D_Y Z &= D_X \nabla_Y Z + D_X(II(Y,Z)\vec{\mathbf{N}}) = \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + II(X, \nabla_Y Z)\vec{\mathbf{N}} + X(II(Y,Z))\vec{\mathbf{N}} + II(Y,Z) D_X \vec{\mathbf{N}} = \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + (S(X)\cdot \nabla_Y Z)\vec{\mathbf{N}} + X(S(Y)\cdot Z)\vec{\mathbf{N}} + II(Y,Z)(-S(X)). \end{aligned}$$

De lo expuesto tenemos las tres relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} D_X D_Y Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - II(Y,Z)\, S(X) + \big(X(S(Y)\cdot Z) + (S(X)\cdot \nabla_Y Z)\big)\vec{\mathbf{N}}. \\ D_Y D_X Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - II(X,Z)\, S(Y) + \big(Y(S(X)\cdot Z) + (S(Y)\cdot \nabla_X Z)\big)\vec{\mathbf{N}}. \\ D_{[X,Y]} Z &= \nabla_{[X,Y]} Z + (S([X,Y])\cdot Z)\vec{\mathbf{N}}. \end{aligned}$$

En estas tres ecuaciones, restando miembro a miembro las dos últimas de la primera, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z = \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z - (II(Y,Z)\, S(X) - II(X,Z)\, S(Y)) + \\ &\quad + \big((\nabla_X(S(Y)) - \nabla_Y(S(X)) - S([X,Y]))\cdot Z\big)\vec{\mathbf{N}}. \end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad 5) de la derivada covariante (Proposición 11.2), esto es

$$X(S(Y)\cdot Z) = \nabla_X S(Y)\cdot Z + S(Y)\cdot \nabla_X Z$$

$$Y(S(X)\cdot Z) = \nabla_Y S(X)\cdot Z + S(X)\cdot \nabla_Y Z$$

para obtener el coeficiente de $\vec{\mathbf{N}}$.

Por tanto, la parte tangente y la parte normal a la superficie deben ser nulas, es decir:

$$R(X,Y)Z - (II(Y,Z)\, S(X) - II(X,Z)\, S(Y)) = 0.$$

$$\nabla_X(S(Y)) - \nabla_Y(S(X)) - S([X,Y]) = 0.$$

□

Definición 11.7 *Se denominan* condiciones de integrabilidad *a las relaciones que figuran en esta Proposición:* (11.2) *condición de integrabilidad de Gauss y* (11.3) *condición de integrabilidad de Codazzi.*

Es claro que para que se satisfagan las condiciones de integrabilidad de la proposición anterior basta con que se verifiquen para campos de vectores básicos. Además, la condición de Codazzi (por antisimetría) es suficiente expresarla para $X = \vec{\mathbf{x}}_1$ e $Y = \vec{\mathbf{x}}_2$ solamente. Así obtenemos una expresión para dicha condición de integrabilidad de Codazzi en coordenadas locales:

Poniendo, previamente

$$S(\vec{\mathbf{x}}_i) = \sum_{j=1}^{2} L_i^j \vec{\mathbf{x}}_j \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\mathbf{N}}_i = -\sum_{j=1}^{2} L_i^j \vec{\mathbf{x}}_j} \tag{11.4}$$

que se conoce con el nombre de ecuación de Weingarten y cuyos coeficientes son

$$S(\vec{\mathbf{x}}_i) \cdot \vec{\mathbf{x}}_k = \sum_{j=1}^{2} L_i^j \vec{\mathbf{x}}_j \cdot \vec{\mathbf{x}}_k \quad \Rightarrow \quad L_{ik} = \sum_{j=1}^{2} L_i^j \, g_{jk} \quad \Rightarrow \quad L_i^j = \sum_{k=1}^{2} g^{jk} \, L_{ik}.$$

$$\nabla_{\vec{\mathbf{x}}_1}(S(\vec{\mathbf{x}}_2)) - \nabla_{\vec{\mathbf{x}}_2}(S(\vec{\mathbf{x}}_1)) - S([\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2]) = \nabla_{\vec{\mathbf{x}}_1}(\sum_{j=1}^{2} L_2^j \vec{\mathbf{x}}_j) - \nabla_{\vec{\mathbf{x}}_2}(\sum_{j=1}^{2} L_1^j \vec{\mathbf{x}}_j) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial L_2^j}{\partial u^1} \vec{\mathbf{x}}_j + L_2^j \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{1j}^k \vec{\mathbf{x}}_k - \frac{\partial L_1^j}{\partial u^2} \vec{\mathbf{x}}_j - L_1^j \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{2j}^k \vec{\mathbf{x}}_k \right) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial L_1^k}{\partial u^2} - \frac{\partial L_2^k}{\partial u^1} = \sum_{j=1}^{2} \left(L_2^j \Gamma_{1j}^k - L_1^j \Gamma_{2j}^k \right) \qquad (k = 1, 2)}$$

Para discutir la condición de Gauss (11.2), multipliquémosla escalarmente por $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, con lo que queda la siguiente condición equivalente

$$R(X, Y, Z, V) = (R(X, Y)Z) \cdot V = II(X, V)II(Y, Z) - II(Y, V)II(X, Z)$$

Relación que define el tensor curvatura de Riemann–Christoffel de tipo (0,4) sobre $\mathcal{M}$. Y cuyas componentes son

$$R_{ijkl} = \sum_{h=1}^{2} g_{lh} R_{ijk}^h.$$

Si en la condición de Gauss obtenida, ponemos $X = \vec{\mathbf{x}}_1$, $Y = \vec{\mathbf{x}}_2$, $Z = \vec{\mathbf{x}}_1$, $V = \vec{\mathbf{x}}_2$, se tiene

$$R(\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2) = L_{12}^2 - L_{11} L_{22}$$

y usando la curvatura de Gauss

$$K = \frac{L_{11} L_{22} - L_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{R_{1212}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2},$$

resulta la siguiente expresión para la condición de integrabilidad de Gauss

$$\boxed{K = -\frac{R_{1212}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}}$$

Se obtiene, en consecuencia, el siguiente

Teorema 11.8 (Teorema egregium de Gauss) *La curvatura de Gauss depende sólo de la primera forma fundamental de la superficie.* □

Nota 11.9 Observemos que sólo es necesario conocer el coeficiente R_{1212} del tensor de Riemann–Christoffel para determinarlo completamente, pues dicho tensor tiene las siguientes propiedades, que resultan inmediatamente de su definición:

$$R(X, Y, Z, V) = -R(Y, X, Z, V) = -R(X, Y, V, Z) = R(Z, V, X, Y)$$

11.3 Teorema fundamental de las superficies en $I\!R^3$

Teorema 11.10 (Teorema fundamental) *Sea $\mathcal{D}$ un dominio conexo y simplemente conexo en $I\!R^2$ y supongamos que g_{ij} y L_{ij} son funciones diferenciables definidas en $\mathcal{D}$, que satisfacen*

1. $g_{ij} = g_{ji}$. *(i,j = 1,2)*

$$\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} a^i a^j \geq 0 \quad y \quad \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} a^i a^j = 0 \Leftrightarrow a^1 = a^2 = 0.$$

2. $L_{ij} = L_{ji}$. *(i,j = 1,2)*

3. *Las condiciones de integrabilidad de Gauss* (11.2) *y Codazzi* (11.3).

Entonces, existe $\vec{\mathbf{x}} : \mathcal{D} \subset I\!R^2 \to I\!R^3$ una aplicación diferenciable que define una superficie sin puntos singulares en $I\!R^3$ que tiene como coeficientes de la primera forma fundamental los g_{ij} y como coeficientes de la segunda forma fundamental los L_{ij} (con respecto a la parametrización local definida por $\vec{\mathbf{x}}$). Esta superficie es única salvo su posición en el espacio.

Demostración.- De acuerdo con las ecuaciones de Gauss (11.1) y Weingarten (11.4) vemos que la referencia $\{\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \vec{\mathbf{N}}\}$ relativa a una parametrización $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ de una superficie satisface al sistema siguiente de cinco ecuaciones diferenciales vectoriales en derivadas parciales

$$\vec{\mathbf{x}}_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \vec{\mathbf{x}}_k + L_{ij} \vec{\mathbf{N}}, \qquad \vec{\mathbf{N}}_i = -\sum_{k=1}^{2} L_i^k \vec{\mathbf{x}}_k. \quad (i, j = 1, 2) \tag{11.5}$$

Por las hipótesis del teorema podemos calcular los coeficientes que aparecen en estas ecuaciones, y considerarlo como un sistema de ecuaciones con incógnitas $\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \vec{\mathbf{N}}$.

Por la teoría de tales sistemas se demuestra que la primera condición que se debe verificar es que las ecuaciones del sistema impliquen la igualdad de las derivadas de orden superiores:

$$\vec{\mathbf{x}}_{ijk} = \vec{\mathbf{x}}_{ikj}, \qquad \vec{\mathbf{N}}_{ij} = \vec{\mathbf{N}}_{ji}.$$

Es obvio que las condiciones de integrabilidad de Gauss y de Codazzi aseguran que (11.5) implican $\vec{\mathbf{x}}_{ijk} = \vec{\mathbf{x}}_{ikj}$. En efecto, es suficiente usar dichas condiciones para los vectores $\vec{\mathbf{x}}_i$, $\vec{\mathbf{x}}_j$.

Además, por diferenciación de la ecuación de Weingarten, se prueba que la igualdad $\vec{\mathbf{N}}_{ij} = \vec{\mathbf{N}}_{ji}$ se deduce de las condiciones de integrabilidad de Gauss y Codazzi.

En estas condiciones, usando la teoría de existencia y unicidad, que asegura la existencia de una única solución $\vec{\mathbf{x}}_1$, $\vec{\mathbf{x}}_2$, $\vec{\mathbf{N}}$ sobre $\mathcal{D}$, con condiciones iniciales $\vec{\mathbf{x}}_1^0$, $\vec{\mathbf{x}}_2^0$, $\vec{\mathbf{N}}^0$, asociadas a un punto $(u_0^1, u_0^2) \in \mathcal{D}$.

Además, si las condiciones iniciales satisfacen a:

$$\vec{\mathbf{x}}_i^0 \cdot \vec{\mathbf{x}}_j^0 = g_{ij}(u_0^1, u_0^2), \quad \vec{\mathbf{x}}_i^0 \cdot \vec{\mathbf{N}}^0 = 0, \quad \vec{\mathbf{N}}^0 \cdot \vec{\mathbf{N}}^0 = 1, \quad [\vec{\mathbf{x}}_1^0\ \vec{\mathbf{x}}_2^0\ \vec{\mathbf{N}}^0] > 0,$$

entonces, condiciones similares se obtienen para las soluciones $\vec{\mathbf{x}}_1$, $\vec{\mathbf{x}}_2$, $\vec{\mathbf{N}}$ en todo punto de $\mathcal{D}$.

Esto se puede probar, definiendo para estas soluciones las funciones asociadas

$$a_{ij} = \vec{\mathbf{x}}_i \cdot \vec{\mathbf{x}}_j - g_{ij}, \qquad b_i = \vec{\mathbf{x}}_i \cdot \vec{\mathbf{N}}, \qquad c = \vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{N}},$$

y demostrando que (11.5) implican

$$da_{ij} = 0, \qquad db_i = 0, \qquad dc = 0.$$

Luego estas funciones son constantes y, por las condiciones iniciales, resulta

$$a_{ij} = 0, \qquad b_i = 0, \qquad c = 1.$$

La condición $[\vec{\mathbf{x}}_1\ \vec{\mathbf{x}}_2\ \vec{\mathbf{N}}] > 0$, se sigue de la continuidad y de la última condición inicial $[\vec{\mathbf{x}}_1^0\ \vec{\mathbf{x}}_2^0\ \vec{\mathbf{N}}^0] > 0$.

Finalmente, definimos

$$\vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = \int_{A_0}^{A} \sum_{i=1}^{2} \vec{\mathbf{x}}_i du^i + \vec{\mathbf{x}}^0. \tag{11.6}$$

donde $\vec{\mathbf{x}}_i$ son las precedentes soluciones de (11.5), $A = (u^1, u^2) \in \mathcal{D}$, $A_0 = (u_0^1, u_0^2) \in \mathcal{D}$ es el punto inicial, y la integral es una integral curvilínea a lo largo de un camino arbitrario que une A_0 con A en $\mathcal{D}$ (ésta está bien definida ya que $\mathcal{D}$ es simplemente conexo, y la integral no depende del camino).

Se tiene así definida una superficie. Y otra que satisfaga a las condiciones del teorema debe también ser solución de (11.5) y (11.6), pero posiblemente corresponde a otros valores iniciales.

Entonces las dos referencias iniciales se pueden superponer una en otra mediante un movimiento en el espacio. Por lo que, las dos superficies se obtienen por un movimiento.

□

Ejemplo 11.11 *Superficie cuyos coeficientes de la 1ª y 2ª forma fundamental son:*

$$g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = 1; \quad L_{11} = -1,\ L_{12} = 0,\ L_{22} = 0$$

Las ecuaciones de compatibilidad de Gauss (11.2) se satisfacen:
$L_{11}L_{22} - L_{12}^2 =$

$$= \quad -R_{1212} = \sum_{h=1}^{2} g_{2h} R_{121}^{h} = \sum_{h=1}^{2} g_{2h} \left(\frac{\partial \Gamma_{21}^{h}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{11}^{h}}{\partial u^2} + \sum_{m=1}^{2} (\Gamma_{21}^{m}\Gamma_{1m}^{h} - \Gamma_{11}^{m}\Gamma_{2m}^{h}) \right)$$

Pues recordando que $\Gamma_{ij}^{k} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{h=1}^{2} g^{hk}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^h}\right)$, resulta que todos los Γ_{ij}^{k} son nulos en este caso, por lo que se satisface la condición de Gauss anterior.
También, y por la misma razón, se verifica la condición de compatibilidad de Codazzi (11.3):

$$\frac{\partial L_1^k}{\partial u^2} - \frac{\partial L_2^k}{\partial u^1} = \sum_{j=1}^{2} \left(L_2^j \Gamma_{1j}^{k} - L_1^j \Gamma_{2j}^{k} \right) \qquad (k = 1, 2)$$

Las ecuaciones de Gauss–Weingarten ((11.1) y (11.4))

$$\vec{\mathbf{x}}_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k} \vec{\mathbf{x}}_k + L_{ij}\vec{\mathbf{N}}, \qquad \vec{\mathbf{N}}_i = -\sum_{j=1}^{2} L_i^j \vec{\mathbf{x}}_j$$

quedan de la forma siguiente:

$$1)\ \vec{\mathbf{x}}_{11} = -\vec{\mathbf{N}} \quad 2)\ \vec{\mathbf{x}}_{12} = 0 \quad 3)\ \vec{\mathbf{x}}_{22} = 0 \quad 4)\ \vec{\mathbf{N}}_1 = -\vec{\mathbf{x}}_1 \quad 5)\ \vec{\mathbf{N}}_2 = 0.$$

De 1) y 4) se tiene $\vec{\mathbf{x}}_{111} = -\vec{\mathbf{x}}_1$; y llamando $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{x}}_1$, resulta:

$$\vec{\mathbf{y}}_{11} + \vec{\mathbf{y}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\mathbf{y}}(u^1, u^2) = -\vec{\mathbf{c}}(u^2)\operatorname{sen} u^1 + \vec{\mathbf{d}}(u^2)\cos u^1.$$

$$\vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = -\vec{\mathbf{C}}(u^2)\operatorname{sen} u^1 + \vec{\mathbf{D}}(u^2)\cos u^1 + \vec{\mathbf{E}}(u^2).$$

Con lo que $\vec{\mathbf{x}}_1 = -\vec{\mathbf{C}}(u^2)\cos u^1 - \vec{\mathbf{D}}(u^2)\operatorname{sen} u^1$; y por 2):

$$\vec{\mathbf{x}}_{12} = -\vec{\mathbf{C}}'(u^2)\cos u^1 - \vec{\mathbf{D}}'(u^2)\operatorname{sen} u^1 = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{C}}(u^2) = cte. \quad \mathbf{D}'(u^2) = cte.$$

Finalmente, usando 3), se tiene $\vec{\mathbf{x}}_{22} = \vec{\mathbf{E}}''(u^2) = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{E}}(u^2) = \vec{\mathbf{A}}u^2 + \vec{\mathbf{B}}$.
Por tanto

$$\boxed{\vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = -\vec{\mathbf{C}}\operatorname{sen} u^1 + \vec{\mathbf{D}}\cos u^1 + \vec{\mathbf{A}}u^2 + \vec{\mathbf{B}}}$$

Ademas, como $g_{12} = \vec{\mathbf{x}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}_2 = 0$, resulta que $\vec{\mathbf{A}}$ es perpendicular tanto a $\vec{\mathbf{C}}$ como a $\vec{\mathbf{D}}$. De $g_{11} = \vec{\mathbf{x}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}_1 = 1$, resulta que $\vec{\mathbf{C}}$ es perpendicular $\vec{\mathbf{D}}$ y ambos son unitarios. Finalmente, de $g_{22} = \vec{\mathbf{x}}_2 \cdot \vec{\mathbf{x}}_2 = 1$, se tiene que $\vec{\mathbf{A}}$ es unitario.
Concluimos que la superficie en cuestión es un cilindro circular de radio uno.

TEMA XII

Aplicaciones entre superficies

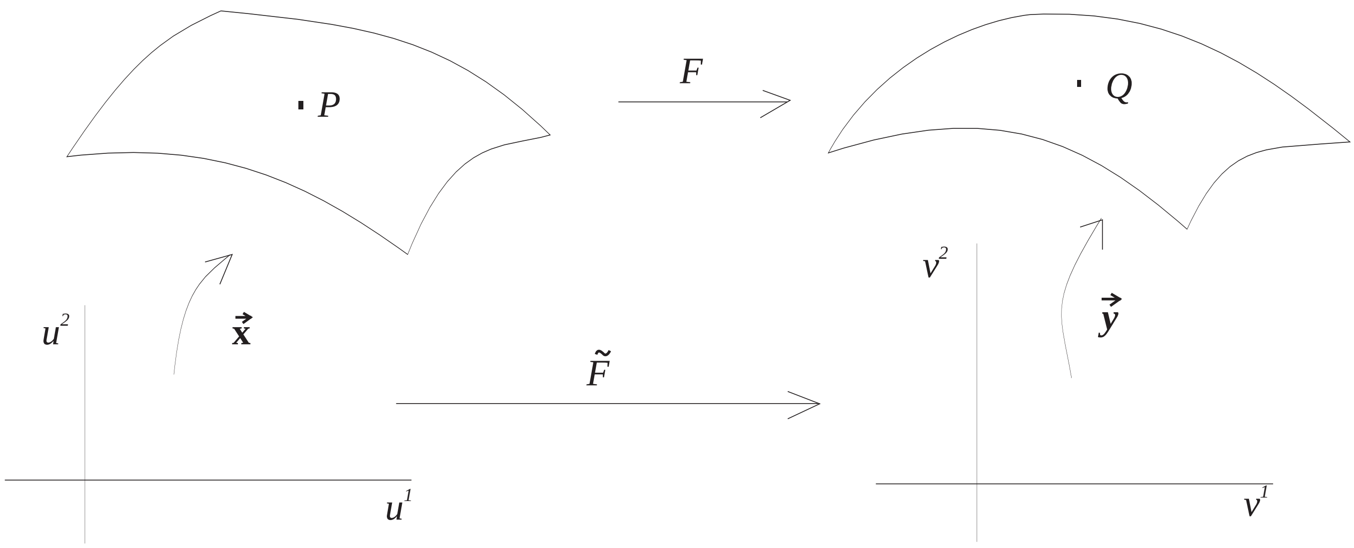
Consideraremos aplicaciones entre superficies que establecen una correspondencia biyectiva entre sus puntos. Las aplicaciones consideradas en este Tema no son las más generales imaginables, sino que le exigiremos suficiente regularidad para que puedan ser representadas por funciones diferenciables. Y de éstas, estudiaremos aplicaciones que conservan ciertos entes geométricos, como longitud de curvas, ángulos entre curvas o áreas de dominios. Para su representación analítica usaremos cartas locales alrededor de un punto de partida y alrededor de su punto imagen.

12.1 Aplicaciones entre superficies

Sean $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ dos superficies en $I\!R^3$, una aplicación $F : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$, una representación $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ de $\mathcal{M}_1$ alrededor de un punto $P \in \mathcal{M}_1$ e $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{y}}(v^1, v^2)$ una parametrización de $\mathcal{M}_2$ alrededor del punto $Q = F(P) \in \mathcal{M}_2$.

Haciendo las restricciones oportunas, la aplicación F se puede expresar en términos de las coordenadas (u^1, u^2) y (v^1, v^2), mediante la aplicación $\widetilde{F} = \vec{\mathbf{y}}^{-1} \circ F \circ \vec{\mathbf{x}}$

$$(u^1, u^2) \mapsto (\widetilde{F}^1(u^1, u^2), \widetilde{F}^2(u^1, u^2)) = (v^1(u^1, u^2), v^2(u^1, u^2)) = (v^1, v^2).$$



Definición 12.1 *F es regular de clase C^n si $v^i = v^i(u^1, u^2) = \widetilde{F}^i(u^1, u^2)$ son funciones de clase C^n para $i = 1, 2$ y el Jacobiano*

$$\frac{\partial(v^1, v^2)}{\partial(u^1, u^2)} \neq 0.$$

Aplicación inducida entre los planos tangentes

Sea un vector tangente en un punto $P \in \mathcal{M}_1$, $\vec{w} = \sum_{i=1}^{2} w^i \vec{\mathbf{x}}_i \in T_P(\mathcal{M}_1)$. Consideremos una curva en $\mathcal{M}_1$, $\vec{\alpha}(t) = \vec{\mathbf{x}}(u^1(t), u^2(t))$, tal que $\vec{\alpha}(0) = \overrightarrow{OP}$ y $\vec{\alpha}\,'(0) = \vec{w}$. Consideremos su curva imagen mediante F en $\mathcal{M}_2$:

$$\vec{\beta}(t) = \vec{\mathbf{y}}(v^1(t), v^2(t)) = \vec{\mathbf{y}}\left(v^1(u^1(t), u^2(t)), v^2(u^1(t), u^2(t))\right).$$

Definimos la aplicación inducida sobre los planos tangentes

$$F_*: T_P(\mathcal{M}_1) \to T_Q(\mathcal{M}_2), \qquad \vec{w} \mapsto F_*(\vec{w}) = \vec{\beta}\,'(0).$$

Es decir,

$$F_*(\vec{w}) = \frac{dv^1}{dt}\vec{\mathbf{y}}_1 + \frac{dv^2}{dt}\vec{\mathbf{y}}_2 = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial v^1}{\partial u^j}\frac{du^j}{dt}\vec{\mathbf{y}}_1 + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial v^2}{\partial u^j}\frac{du^j}{dt}\vec{\mathbf{y}}_2$$

particularizadas en el valor adecuado. O en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial v^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{w}^1 \\ \widetilde{w}^2 \end{pmatrix}.$$

La aplicación F_* es lineal y no depende de la elección de la curva, sólo de F y las componentes de $\vec{w}$.

La aplicación regular F permite hacer una transformación de coordenadas en $\mathcal{M}_2$:

$$\vec{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{z}}(u^1, u^2) = \vec{\mathbf{y}}(\widetilde{F}^1(u^1, u^2), \widetilde{F}^2(u^1, u^2)),$$

y con esta parametrización los puntos correspondientes de $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ tienen las mismas coordenadas curvilíneas y los vectores correspondientes tienen las mismas componentes respecto a la base natural sobre ambas superficies, cuando ocurre esto decimos que:

Definición 12.2 *Estas parametrizaciones de las superficies se dicen que son* compatibles *con respecto a F.*

Nota 12.3 La utilización de parametrizaciones compatibles simplifica los cálculos y, por tanto, supondremos de ahora en adelante, para trabajar con aplicaciones entre superficies, que las parametrizaciones son compatibles.

12.2 Aplicaciones isométricas

Definición 12.4 *Una aplicación biyectiva regular $F : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ se dice* isométrica *o que es una* isometría *si conserva la longitud de curvas; es decir, si la longitud de la imagen de un arco de curva es igual a la longitud del mismo arco.*

Proposición 12.5 *Una aplicación biyectiva regular de clase C^1 entre superficies de clase C^1 es una isometría si y sólo si, en parametrizaciones compatibles, las primeras formas fundamentales coinciden.*

Demostración.- Puesto que suponemos ambas superficies parametrizadas de forma compatible con la aplicación entre ellas, una curva sobre $\mathcal{M}_1$ y su imagen por la aplicación F tienen las mismas ecuaciones paramétricas en coordenadas curvilíneas:

$$u^i = u^i(t), \quad (i = 1, 2).$$

Así la longitud de arco de t_0 a t en $\mathcal{M}_1$ y sobre $\mathcal{M}_2$ son, respectivamente:

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt, \qquad \int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{g}_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt.$$

Por la definición que hemos dado, la aplicación es una isometría si y sólo si, para toda curva, se tiene

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{g}_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt$$

idénticamente para todo t. Pero esto es equivalente a la identidad

$$\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}dt = \sum_{i,j=1}^{2} \tilde{g}_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}dt$$

para toda curva.

En particular, si tomamos la curva $u^1 = u_0^1 + t, \quad u^2 = u_0^2$, en $t = 0$ se tiene:

$$g_{11}(u_0^1, u_0^2) = \tilde{g}_{11}(u_0^1, u_0^2).$$

Y si tomamos la curva $u^1 = u_0^1, \quad u^2 = u_0^2 + t$, en $t = 0$ se tiene:

$$g_{22}(u_0^1, u_0^2) = \tilde{g}_{22}(u_0^1, u_0^2).$$

Por último, si tomamos la curva $u^1 = u_0^1 + t, \quad u^2 = u_0^2 + t$, en $t = 0$ se tiene:

$$g_{11}(u_0^1, u_0^2) + 2g_{12}(u_0^1, u_0^2) + g_{22}(u_0^1, u_0^2) = \tilde{g}_{11}(u_0^1, u_0^2) + 2\tilde{g}_{12}(u_0^1, u_0^2) + \tilde{g}_{22}(u_0^1, u_0^2),$$

y, por tanto:

$$g_{12}(u_0^1, u_0^2) = \tilde{g}_{12}(u_0^1, u_0^2).$$

Como el punto (u_0^1, u_0^2) es arbitrario, se sigue $g_{ij} = \tilde{g}_{ij}$.

Recíprocamente, las identidades $g_{ij} = \tilde{g}_{ij}$, implican que para toda curva $u^i = u^i(t), \quad a \leq t \leq b$, se tiene

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{g}_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}dt$$

y, por tanto, la aplicación es una isometría. □

Definición 12.6 *Dos superficies se dicen que son* isométricas *si entre ellas se puede definir una isometría. Si todo punto de una superficie admite un entorno que puede ser aplicado isométricamente sobre un entorno de su imagen en la otra superficie, se dice que las superficies son* localmente isométricas.

12.3 Isometría entre una superficie desarrollable y el plano

La superficie generada por las tangentes a una curva $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$, siendo s el parámetro longitud de arco, tiene por ecuación

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = \vec{\alpha}(u^1) + u^2\vec{t}(u^1) \qquad (s = u^1),$$

y su primera forma fundamental es

$$I \equiv \left(1 + (\kappa(u^1))^2 (u^2)^2\right)(du^1)^2 + 2du^1 du^2 + (du^2)^2,$$

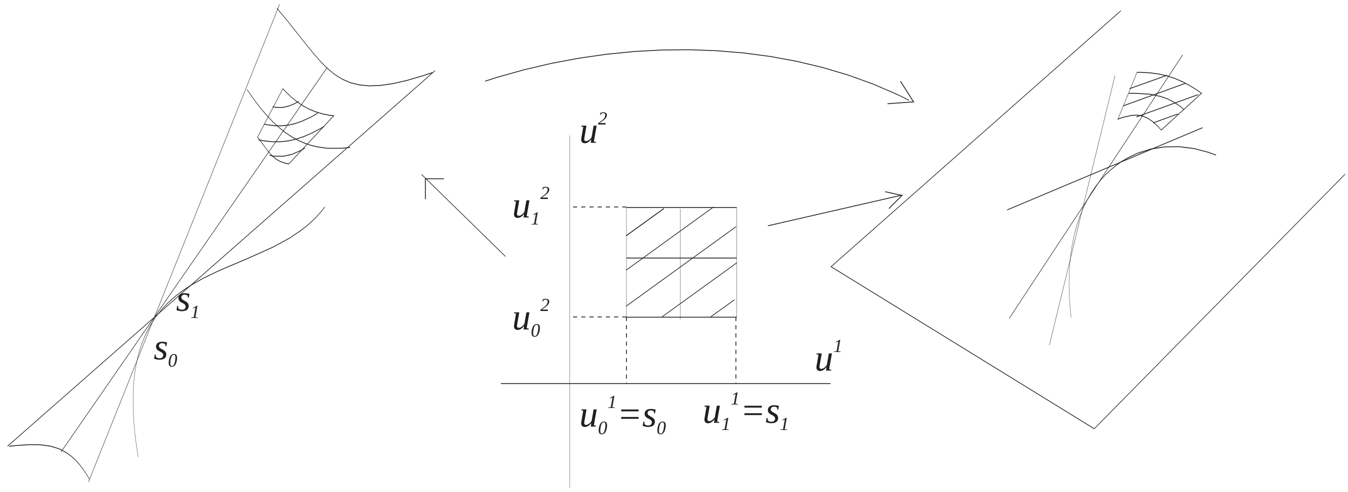
en la cual se observa que los coeficientes dependen solamente de la curvatura de la curva, lo cual nos permite afirmar:

Proposición 12.7 *Si dos curvas tienen las mismas curvaturas como funciones del parámetro longitud de arco, pero no necesariamente con las mismas torsiones, las correspondientes superficies tangentes son isométricas (al menos localmente).* □

Así, en particular, podemos considerar una curva con la curvatura dada y con torsión nula, cuya existencia sabemos que está garantizada por el teorema fundamental de la teoría de curvas. En este caso, la curva está en un plano y cada superficie simple $u^2 > 0$ y $u^2 < 0$ está superpuesta a la otra.

Los parámetros (u^1, u^2) pueden ser considerados como coordenadas curvilíneas del plano, y si nos restringimos a un entorno suficientemente pequeño sobre el plano de los parámetros (u^1, u^2) que esté enteramente contenido en uno de los semiplanos, $u^2 > 0$ o $u^2 < 0$, esta representación será una representación paramétrica regular de una porción del plano.

Así, la aplicación de la superficie desarrollable, con la arista de retroceso dada, en el plano,



obtenida enviando el punto con coordenadas (u^1, u^2) en el punto del plano con las mismas coordenadas curvilíneas, es biyectiva cuando nos restringimos a un entorno suficientemente pequeño de las placas de la superficie, y además es claro que se conserva la primera forma fundamental. Por tanto esta aplicación es una isometría local.

De forma similar se prueba que los conos y los cilindros son también isométricos al plano. Podemos, por tanto, enunciar:

Proposición 12.8 *Las superficies desarrollables, excluida su arista de retroceso, son localmente isométricas al plano.* □

12.4 Aplicaciones conformes o isogonales

Definición 12.9 *Una aplicación $F : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ se dice* conforme *o* isogonal *si conserva los ángulos entre curvas que se cortan.*

Representamos, por g_{ij} y $\tilde{g}_{ij}$ los coeficientes de las primeras formas fundamentales de $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ en coordenadas compatibles.

Proposición 12.10 *Una aplicación regular de clase C^1 es conforme si y sólo si, en coordenadas compatibles, las primeras formas fundamentales de las superficies son proporcionales en todos los puntos*

$$\tilde{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij}. \tag{12.1}$$

Demostración.- Es claro que si se verifica (12.1), la aplicación es conforme, pues si $u^i = \phi^i(t)$ y $u^i = \psi^i(t)$ $(i = 1, 2)$ representan curvas en $\mathcal{M}_1$ y sus correspondientes imagenes en $\mathcal{M}_2$, el ángulo entre ellas viene dado por

$$cos\,\tilde{\theta} = \frac{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{g}_{ij}\frac{d\phi^i}{dt}\frac{d\psi^j}{dt}}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{g}_{ij}\frac{d\phi^i}{dt}\frac{d\phi^j}{dt}}\sqrt{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{g}_{ij}\frac{d\psi^i}{dt}\frac{d\psi^j}{dt}}} =$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \lambda^2 g_{ij}\frac{d\phi^i}{dt}\frac{d\psi^j}{dt}}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \lambda^2 g_{ij}\frac{d\phi^i}{dt}\frac{d\phi^j}{dt}}\sqrt{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \lambda^2 g_{ij}\frac{d\psi^i}{dt}\frac{d\psi^j}{dt}}} = cos\,\theta.$$

Supongamos ahora que la aplicación es conforme y elegimos en un punto de $\mathcal{M}_1$ dos direcciones perpendiculares dadas por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. La primera dirección viene dada por un vector arbitrario $\vec{v}$ y la segunda está determinada por la ecuación

$$\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} v^i w^j = 0.$$

Puesto que la aplicación es conforme las imagenes son también perpendiculares, y tenemos

$$\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{g}_{ij} v^i w^j = 0.$$

Caso A) $g_{12} \neq 0$.

Escogiendo $v^1 = 0, v^2 = 1$, se tiene que la dirección perpendicular satisface al sistema

$$g_{21}w^1 + g_{22}w^2 = 0, \qquad \tilde{g}_{21}w^1 + \tilde{g}_{22}w^2 = 0.$$

que tiene solución no trivial si y sólo si

$$\begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{o equivalentemente} \quad \tilde{g}_{21} = \lambda^2 g_{21}, \quad \tilde{g}_{22} = \lambda^2 g_{22}.$$

Repitiendo el razonamiento, con $v^1 = 1, v^2 = 0$, se obtiene

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{o sea} \qquad \tilde{g}_{11} = \lambda^2 g_{11}, \quad \tilde{g}_{12} = \lambda^2 g_{12}.$$

Como $g_{12} \neq 0$ resulta:

$$\lambda^2 = \frac{\tilde{g}_{12}}{g_{12}} = \frac{\tilde{g}_{21}}{g_{21}} = \frac{\tilde{g}_{11}}{g_{11}} = \frac{\tilde{g}_{22}}{g_{22}}.$$

Caso B) $\quad g_{12} = \tilde{g}_{12} = 0$.

Las direcciones $v^1 = v^2 = 1$ y $w^1 = g_{22}, w^2 = -g_{11}$ son perpendiculares. En consecuencia

$$\tilde{g}_{11}g_{22} - \tilde{g}_{22}g_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{g}_{11}}{g_{11}} = \frac{\tilde{g}_{22}}{g_{22}},$$

con lo que (12.1) está probado en todos los casos. □

Ejemplo 12.11 *Toda superficie de revolución puede aplicarse conformemente en el plano.*

Si se elige el eje OZ como eje de revolución de la curva $z = F(r)$ en el plano $y = 0$, la superficie resultante está dada por

$$x = r\cos v, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\, v, \qquad z = F(r).$$

La primera forma fundamental, para esta parametrización, es

$$I \equiv (1 + F'^2)dr^2 + r^2dv^2.$$

Haciendo el cambio de coordenadas $u = \int \frac{\sqrt{1+F'^2}}{r}dr, \quad v = v$, la primera forma fundamental queda ahora:

$$I \equiv r^2(du^2 + dv^2).$$

Basta entonces establecer la correspondencia entre la superficie de revolución y el plano (en el que se considera las coordenadas cartesianas ortogonales) mediante la aplicación dada por

$$x = v, \qquad\qquad y = u.$$

Así, los coeficientes de las primera forma fundamental de ambas son proporsionales, teniéndose por tanto definida una aplicación conforme.

Mediante esta aplicación, a los meridianos $v = cte.$, le corresponden restas paralelas al eje OY y a los paralelos $u = cte.$, rectas paralelas al eje OX.

En particular, si se trata de una esfera de radio a, esto es si $r = a\cos\theta$, $F(r) = a\operatorname{sen}\theta$, se tiene la ecuación paramétrica de la esfera:

$$x = a\cos\theta\cos v, \qquad y = a\cos\theta\operatorname{sen} v, \qquad z = a\operatorname{sen}\theta.$$

Su primera forma fundamental es

$$I \equiv a^2 d\theta^2 + a^2\cos^2\theta dv^2,$$

que haciendo el cambio de coordenadas $u = \displaystyle\int \frac{1}{\cos\theta} d\theta$, $\quad v = v$, se transforma en

$$I \equiv a^2\cos^2\theta(du^2 + dv^2).$$

Se obtiene así una aplicación conforme de la esfera en el plano:

$$x = v, \qquad\qquad y = u = \int \frac{1}{\cos\theta} d\theta = \ln\operatorname{tag}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

en la que, al ecuador $\theta = 0$ le corresponde el eje OX; a los paralelos $\theta = cte.$, rectas paralelas al eje OX y a los meridianos $v = cte.$, rectas paralelas al eje OY. Esta es la aplicación que se utiliza para confeccionar los mapamundis, que pierden realidad a medida que nos alejamos del ecuador.

12.5 Aplicaciones isoareales

Definición 12.12 *Una aplicación se dice* isoareal *si conserva las áreas de los dominios.*

Proposición 12.13 *Una aplicación regular de clase C^1 de $\mathcal{M}_1$ en $\mathcal{M}_2$ es localmente isoareal si y sólo si, en coordenadas compatibles,*

$$g = g_{11}g_{12} - g_{12}^2 = \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{12} - \tilde{g}_{12}^2 = \tilde{g}. \tag{12.2}$$

Demostración.- Las áreas de los dominios sobre ambas superficies correpondientes a un dominio Ω en el plano de los parámetros (u^1, u^2) son respectivamente

$$\iint_\Omega \sqrt{g}\, du^1 du^2, \qquad \iint_\Omega \sqrt{\tilde{g}}\, du^1 du^2.$$

Así la aplicación es isoareal si y sólo si

$$\iint_\Omega \sqrt{g}\, du^1 du^2 = \iint_\Omega \sqrt{\tilde{g}}\, du^1 du^2.$$

para todo Ω, lo que a su vez equivale a que los integrandos sean iguales, es decir $\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}}$ o bien $g = \tilde{g}$. □

TEMA XIII

Curvatura geodésica y líneas geodésicas

13.1 La geometría intrínseca de una superficie

Definición 13.1 *Se llaman* invariantes isométricos *de las superficies a aquellas cantidades o propiedades que se conservan por isometrías.*

Definición 13.2 *La* geometría intrínseca *de la superficie estudia los invariantes isométricos.*

Ejemplos de invariantes isométricos:
1) La longitud de una curva. 2) El area de un dominio.
3) El ángulo entre curvas. 4) La curvatura de Gauss.
5) El tipo de puntos: elíptico, hiperbólico, parabólico.

Todas estas cantidades o propiedades están bien definidas independientemente de las coordenadas curvilíneas que se utilicen para calcularlas o determinarlas y, por tanto, se conservan bajo isometrías sin que influyan las coordenadas curvilíneas.

Sólo si se usan coordenadas compatibles, los coeficientes g_{ij} de la primera forma fundamental y los símbolos de Cristoffel Γ_{ij}^{k}, se conservan por isometrías, por lo que no se pueden considerar como invariantes isométricos.

Como ejemplo del caracter intrínseco de la curvatura de Gauss, tenemos la siguiente

Proposición 13.3 *La esfera no es localmente isométrica al plano.*

Demostración.- Si lo fuera, sus curvaturas de Gauss en puntos correspondientes deberían ser iguales, sin embargo, en la esfera es positiva y en el plano es nula. □

13.2 Curvatura geodésica

Consideremos una curva $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$, parametrizada con parámetro arco, sobre una superficie $\mathcal{M}$, entonces el vector $\ddot{\vec{\alpha}}$, se descompone, usando el producto escalar en $\mathbb{R}^3$, en un vector $\vec{k}_g$ tangente a la superficie (llamado vector curvatura geodésica) y en un vector $\vec{k}_n$ en la dirección de la normal $\vec{\mathbf{N}}$ a la superficie (vector curvatura normal):

$$\ddot{\vec{\alpha}} = \vec{k}_g + \vec{k}_n.$$

Que, de acuerdo a la ecuación de Gauss (11.1), resulta:

$$\vec{k}_g = \nabla_{\dot{\vec{\alpha}}}\dot{\vec{\alpha}}; \qquad \vec{k}_n = II(\dot{\vec{\alpha}}, \dot{\vec{\alpha}})\vec{\mathbf{N}}.$$

Supongamos que la curva está sobre la superficie de representación paramétrica $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ de clase C^2, y que la ecuación paramétrica de la curva en coordenadas curvilíneas es $u^i = u^i(s)$, $i = 1, 2$, con s parámetro longitud de arco; es decir, la representación paramétrica vectorial de la curva será

$$\vec{\alpha}(s) = \vec{\mathbf{x}}(u^1(s), u^2(s)).$$

Por lo que tenemos las siguientes expresiones para los vectores curvatura geodésica y normal:

$$\vec{k}_g = \sum_{k=1}^{2}\Big(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\Big)\vec{\mathbf{x}}_k. \qquad (13.1)$$

$$\vec{k}_n = \Big(\sum_{i,j=1}^{2} L_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\Big)\vec{\mathbf{N}}. \qquad (13.2)$$

Como el vector $\ddot{\vec{\alpha}}$ es independiente del sentido de recorrido de la curva y como además, el vector curvatura geodésica $\vec{k}_g$ no depende de la elección de la parametrización de la superficie, se trata pues de un invariante isométrico.

Consideremos una curva $\vec{\alpha}(s) = \vec{\mathbf{x}}(u^1(s), u^2(s))$, de clase C^2 sobre una superficie de clase C^2. En cada punto P de la curva consideremos el vector unitario $\vec{u} \in T_P(\mathcal{M})$, definido por

$$\vec{u} = \vec{\mathbf{N}} \times \vec{t}$$

al que llamaremos normal geodésica. Se tiene que la terna $\{\vec{t}, \vec{u}, \vec{\mathbf{N}}\}$ está ordenada positivamente en $\mathbb{R}^3$ y que el sentido del vector $\vec{u}$ depende de la orientación de la superficie. Debido a esto, el vector normal geodésica puede considerarse como intrínseco, con la reserva de que su sentido depende de la orientación.

Puesto que tanto $\vec{k}_g$ como $\vec{u}$ son ortogonales a $\vec{\mathbf{N}}$ y a $\vec{t}$, tendrán la misma dirección, por tanto

$$\vec{k}_g = \kappa_g \, \vec{u}.$$

Al coeficiente κ_g le denominamos **curvatura geodésica** de la curva sobre la superficie.

Puesto que $\vec{k}_g$ es invariante por isometrías y $\vec{u}$ es invariante si no cambia la orientación y cambia su signo si la orientación cambia, resulta que la curvatura geodésica κ_g tiene la misma propiedad. Por lo que podemos decir que el valor absoluto de la curvatura geodésica es un invariante isométrico, y su signo cambia con la orientación de la superficie.

Proposición 13.4 *La curvatura geodésica de una curva de clase C^2 sobre una superficie de clase C^2 está dada por:*

$$\kappa_g = \sqrt{g}\begin{vmatrix} \dfrac{du^1}{ds} & \dfrac{du^2}{ds} \\ \dfrac{d^2u^1}{ds^2} + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \Gamma^1_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} & \dfrac{d^2u^2}{ds^2} + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \Gamma^2_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} \end{vmatrix}$$

siendo s el parámetro longitud de arco. El valor absoluto de la curvatura geodésica, no depende del sistema de coordenadas curvilíneas, pero su signo cambia con la orientación de la superficie o de la curva. El valor absoluto de la curvatura geodésica es un invariante isométrico.

Demostración.- Tenemos

$$\kappa_g = \vec{k}_g \cdot \vec{u} = \sum_{k=1}^{2}\Big(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\Big)\vec{\mathbf{x}}_k \cdot \vec{u}.$$

Calculando los productos $\vec{\mathbf{x}}_k \cdot \vec{u}$, $(k = 1, 2)$, y sustituyéndolos aquí, da la fórmula deseada.

$$\vec{\mathbf{x}}_k \cdot \vec{u} = \vec{\mathbf{x}}_k \cdot (\vec{\mathbf{N}} \times \vec{t}) = \vec{\mathbf{N}} \cdot (\vec{t} \times \vec{\mathbf{x}}_k) = \vec{\mathbf{N}} \cdot \left(\Big(\sum_{\ell=1}^{2}\frac{du^\ell}{ds}\vec{\mathbf{x}}_\ell\Big) \times \vec{\mathbf{x}}_k\right).$$

$$\vec{\mathbf{x}}_1 \cdot \vec{u} = \vec{\mathbf{N}} \cdot (\frac{du^2}{ds}\vec{\mathbf{x}}_2 \times \vec{\mathbf{x}}_1) = -\vec{\mathbf{N}} \cdot (\sqrt{g}\frac{du^2}{ds}\vec{\mathbf{N}}) = -\sqrt{g}\frac{du^2}{ds}.$$

$$\vec{\mathbf{x}}_2 \cdot \vec{u} = \vec{\mathbf{N}} \cdot (\frac{du^1}{ds}\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2) = \vec{\mathbf{N}} \cdot (\sqrt{g}\frac{du^1}{ds}\vec{\mathbf{N}}) = \sqrt{g}\frac{du^1}{ds}.$$

Como hemos señalado antes, la curvatura geodésica no cambia bajo isometrías conservando la orientación, y cambia su signo cuando la isometría cambia la orientación.

El cambio de orientación de la curva (cambiando s por $-s$) cambia el signo de la primera fila del determinante, pero no afecta a la segunda fila, por tanto cambia

también el signo de la curvatura geodésica. Por último, el hecho de que κ_g es independiente de las coordenadas curvilíneas puede ser comprobado directamente en su exprexión en coordenadas dada; pero también se deduce del hecho de que la definición de la curvatura geodésica ha sido dada sin referencia a coordenadas, únicamente usando el vector derivada segunda $\ddot{\vec{\alpha}}$ de la curva y el vector normal a la superficie. □

Nota 13.5 Observemos que la expresión de la curvatura geodésica obtenida es válida solamente para la parametrización natural de la curva. Para obtener una expresión válida en general, relativa a otra parametrización de la curva, se tiene

$$\frac{du^k}{ds} = \frac{du^k}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{du^k}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)^{-1/2},$$

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} = \frac{d^2u^k}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{du^k}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} = \frac{d^2u^k}{dt^2}\left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)^{-1} + \frac{du^k}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}$$

que sustituyendo en la fórmula de la Proposición 13.4, y restando de la segunda fila del determinante, la primera multiplicada por

$$\left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)^{1/2}\frac{d^2t}{ds^2},$$

resulta:

$$\kappa_g = \frac{\sqrt{g}}{\left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)^{3/2}}\begin{vmatrix} \dfrac{du^1}{dt} & \dfrac{du^2}{dt} \\ \dfrac{d^2u^1}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma^1_{ij}\dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt} & \dfrac{d^2u^2}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma^2_{ij}\dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt} \end{vmatrix}$$

Nota 13.6 De la definición de los vectores $\vec{k}_g$ y $\vec{k}_n$ se siguen de modo inmediato las siguientes propiedades:

1) Si dos superficies son tangentes a lo largo de una curva (es decir, tienen el mismo plano tangente en todos los puntos de una curva común) y tienen la misma orientación en los puntos comunes (es decir, la misma normal unitaria), entonces las curvaturas geodésicas de la curva sobre ambas superficies coinciden. Si son opuestas las orientaciones, las curvaturas geodésicas también lo son.

2) Si dos superficies se cortan a lo largo de una curva $\mathcal{C}$ según un ángulo recto en todos los puntos, entonces el vector curvatura geodésica de $\mathcal{C}$ sobre una de las superficies coincide con el vector de curvatura normal de $\mathcal{C}$ sobre la otra en todo punto de $\mathcal{C}$ y viceversa.

13.3 Líneas geodésicas

Definición 13.7 *Una línea geodésica o simplemente una* geodésica *de una superficie es una curva sobre la superficie cuya curvatura geodésica es cero en todos sus puntos.*

Observemos, que esta definición es equivalente a la dada en el tema en el que se estudia curvas especiales sobre una superficie: allí (§ 10.5, Definición 10.42) se definía una geodésica como aquellas curvas cuyo vector derivada segunda es perpendicular a la superficie, y por tanto su proyección sobre el plano tangente es el vector nulo.

La noción de geodésicas pertenece a la geometría intrínseca, puesto que el valor absoluto de la curvatura geodésica es invariante por isometrías.

Para obtener la ecuación diferencial de una geodésica, basta con igualar a cero la expresión en coordenadas del vector curvatura geodésica (13.1)

$$\vec{k}_g = \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\vec{\mathbf{x}}_k.$$

Tenemos entonces, dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden:

$$\boxed{\frac{d^2u^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 0 \qquad (k=1,2)} \tag{13.3}$$

Sin embargo, puesto que s es el parámetro longitud de arco, la geodésica debe verificar también la siguiente condición

$$\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 1 \tag{13.4}$$

y esta condición permite reemplazar las ecuaciones (13.3) por una sola ecuación:

$$\frac{d^2u^2}{(du^1)^2} = \Gamma_{22}^1\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2)\frac{du^2}{du^1} - \Gamma_{11}^2$$

donde hemos considerado u^2 como función de u^1 (ver, por ejemplo, [21, pág. 152]).

Comprobemos ahora que si los valores iniciales de u^i y $\dfrac{du^i}{ds}$ satisfacen las condiciones (13.4), entonces esta condición es satisfecha por la solución de (13.3) determinada por sus condiciones iniciales. Para ello, si diferenciamos el lado izquierdo de (13.4) se tiene

$$\sum_{i,j=1}^{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\right)\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} + 2g_{ij}\frac{d^2u^i}{ds^2}\frac{du^j}{ds}\right)$$

y sustituimos u^i por una solución del sistema (13.3) obtenemos (prescindiendo de los símbolos de sumatorio) que

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} - 2g_{ij}\Gamma^i_{\ell k}\frac{du^\ell}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds} =$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} - g_{ij}g^{hi}\left(\frac{\partial g_{h\ell}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial u^\ell} - \frac{\partial g_{\ell k}}{\partial u^h}\right)\frac{du^\ell}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds} =$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^\ell}\frac{du^\ell}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds} - \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^k}\frac{du^\ell}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}\frac{du^\ell}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds}$$

y si ahora en el segundo sumando hacemos $k \to i, \ell \to k$; en el tercero $\ell \to i$ y en el cuarto $\ell \to i, k \to j, j \to k$, obtenemos que la suma es cero; lo que significa que el lado izquierdo de (13.4) es constante y su valor es el mismo que el inicial. Esto no libera de la necesidad de comprobar cada vez si la solución de (13.3) satisface (13.4).

Proposición 13.8 *Por todo punto regular de una superficie de clase C^2 y en toda dirección pasa al menos una geodésica. Si la superficie es de clase C^3, entonces existe exactamente una geodésica.*

Demostración.- Sea $\vec{a} = \sum_{i=1}^{2} a^i\vec{\mathbf{x}}_i$ un vector unitario que determine la dirección dada en el punto $P_0(u_0^1, u_0^2)$. Las componentes a^i, utilizadas como valores iniciales para $\dfrac{du^1}{ds}$, satisfacen por tanto (13.4). Así, la ecuación de una geodésica por P_0 en la dirección de $\vec{a}$ es una solución de (13.3) con valores iniciales

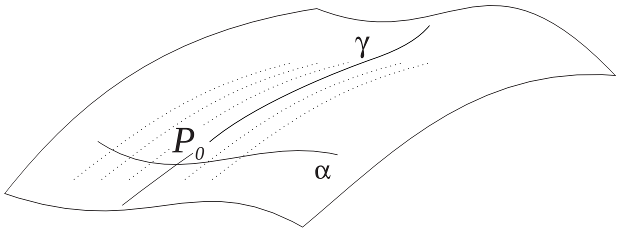
$$u^i = u_0^i, \qquad \frac{du^i}{ds} = a^i.$$

Por el teorema de existencia y unicidad de la teoría de ecuaciones diferenciales, una tal solución existe si los coeficientes son continuos y es única si satisfacen unas condiciones más fuertes (la condición de Lipschitz); en cualquier caso, esto es cierto si tienen derivadas parciales continuas. La hipótesis de clase C^2 implica que Γ^k_{ij} son continuas y la clase C^3 implica que los Γ^k_{ij} son de clase C^1. Esto completa la demostración. □

13.4 Coordenadas semigeodésicas

Definición 13.9 *Una parametrización $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ de una superficie $\mathcal{M}$ se denomina* parametrización semigeodésica *si los coeficientes de la primera forma fundamental satisfacen $g_{11} = 1, g_{12} = g_{21} = 0$ con respecto a esta parametrización.*

Proposición 13.10 *Para todo punto $P_0 \in \mathcal{M}$ y para todo arco geodésico γ a través de P_0, existe una parametrización semigeodésica de $\mathcal{M}$ alrededor de P_0 tal que γ pertenece a las líneas paramétricas $u^2 = cte$.*



Demostración.- Sea α una curva en $\mathcal{M}$ pasando por P_0 y ortogonal a γ en este punto (por ejemplo, α puede ser la geodésica determinada por P_0 y por la dirección ortogonal a γ y tangente a $\mathcal{M}$). Consideremos la familia $\mathcal{F}$ de geodésicas definidas por los puntos de α y tangentes ortogonales a α.

Ahora consideremos el campo de vectores tangente de $\mathcal{F}$, y un campo de vectores ortogonal (y por el siguiente Lema 13.11) construimos una parametrización $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{y}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ cuyas líneas paramétricas son tangentes a estos dos campos de vectores. Es obvio que estas están correctamente definidas en un entorno de P_0, y además, podemos escogerlas de tal forma que las curvas de $\mathcal{F}$ sean $\tilde{u}^2 = cte$. Nótese que γ es un elemento de la familia $\mathcal{F}$.

Ya que las líneas paramétricas son ortogonales, tenemos $\tilde{g}_{12}$=0. Ya que $\tilde{u}^2 = cte.$ satisface a

$$\frac{d^2\tilde{u}^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{d\tilde{u}^i}{ds}\frac{d\tilde{u}^j}{ds} = 0 \qquad (k = 1, 2).$$

Se tiene que $\tilde{\Gamma}_{11}^2 = 0$, esto es $\dfrac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial \tilde{u}^2} = 0$, y por tanto $\tilde{g}_{11}$ es sólo función de $\tilde{u}^1$.

Poniendo

$$u^1 = \int \sqrt{\tilde{g}_{11}}\, d\tilde{u}^1, \qquad u^2 = \tilde{u}^2,$$

obtenenemos una nueva parametrización alrededor de P_0, la cual es obviamente semigeodésica. □

Lema 13.11 *Sean X e Y dos campos de vectores tangentes a $\mathcal{M}$ definidos en un entorno abierto $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ y no colineales. Entonces, para todo $P_0 \in \mathcal{O}$ existe una parametrización $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ tal que*

$$X = a\vec{\mathbf{x}}_1 \qquad Y = b\vec{\mathbf{x}}_2 \qquad \textit{(a y b funciones no nulas).}$$

Demostración.- Partimos de una parametrización $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{y}}(v^1, v^2)$ alrededor de P_0 tal que $\overrightarrow{OP}_0 = \vec{\mathbf{y}}(v_0^1, v_0^2)$. Encontraremos un cambio de parametrización $u^i = u^i(v^1, v^2)$ $(i = 1, 2)$, tal que la nueva parametrización $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ sea la deseada. Esto significa que las componentes de X e Y con respecto a la base natural de la parametrización $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(v^1, v^2)$ deben ser respectivamente $a\delta_1^i$ y $b\delta_2^i$ $(i = 1, 2)$.

Si $X = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} X^j \vec{\mathbf{y}}_j$ e $Y = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} Y^j \vec{\mathbf{y}}_j$, se tiene

$$X^j = \sum_{i=1}^{2} a\delta_1^i \frac{\partial v^j}{\partial u^i} = a\frac{\partial v^j}{\partial u^1} \quad \text{e} \quad Y^j = \sum_{i=1}^{2} b\delta_2^i \frac{\partial v^j}{\partial u^i} = a\frac{\partial v^j}{\partial u^2}.$$

Esto implica

$$dv^1 = \frac{1}{a}X^1du^1 + \frac{1}{b}Y^1du^2, \qquad dv^2 = \frac{1}{a}X^2du^1 + \frac{1}{b}Y^2du^2.$$

Y resolviendo estas ecuaciones en las incógnitas du^1, du^2 (lo cual es posible ya que $X^1Y^2 - X^2Y^1 \neq 0$, puesto que X e Y no son colineales), se tiene

$$du^1 = a(\omega_1^1 dv^1 + \omega_2^1 dv^2), \qquad du^2 = b(\omega_1^2 dv^1 + \omega_2^2 dv^2),$$

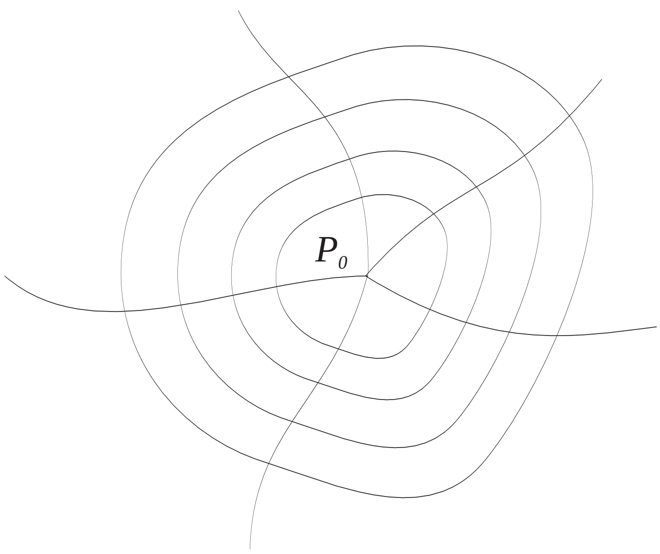
ω_j^i son funciones diferenciables conocidas definidas en un entorno abierto de (v_0^1, v_0^2).

Ahora, es conocido del cálculo que toda forma $\omega_1 dv^1 + \omega_2 dv^2$ tiene un factor integrante f, que está definido en algún entorno de (v_0^1, v_0^2) y para el que es una diferencial exacta la forma:

$$f(\omega_1 dv^1 + \omega_2 dv^2).$$

Entonces, es posible encontrar a y b, e integrando tenemos el cambio de parámetro deseado, cuyo jacobiano no se anula, pues X e Y son independientes. □

Nota 13.12



Otra forma de introducir las coordenadas semigeodésicas consiste en considerar en un punto arbitrario P_0 de la superficie las geodésicas que parten desde este punto en todas las direcciones ($u^2 = cte.$), así como sus trayectorias ortogonales ($u^1 = cte$), teniéndose, entonces

$$I \equiv (du^1)^2 + G(u^1, u^2)(du^2)^2$$

en la cual u^1 es ahora la longitud de arco a lo largo de la geodésica, medido a partir de P_0. En este caso, se dice que tenemos un sistema de coordenadas semigeodésicas polares.

Propiedad minimal de las curvas geodésicas

Proposición 13.13 *Para todo par $P, Q \in \mathcal{M}$ de puntos suficientemente próximos unidos por una geodésica γ, entonces γ es el camino más corto entre P y Q.*

Demostración.- Usamos una parametrización semigeodésica alrededor del punto P, y suponemos que suficientemente próximos significa que Q pertenece al rango de esta parametrización. Entonces, si $\vec{\alpha}(t) = \vec{\mathbf{x}}(u^1(t), u^2(t))$ es alguna curva que une P con Q, su longitud está dada por

$$l(\alpha) = \int_P^Q \left(\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2 \right)^{1/2} dt \geq \int_P^Q du^1 = u_Q^1 - u_P^1 = l(\gamma).$$

□

TEMA XIV

Transporte paralelo sobre una superficie

14.1 Transporte paralelo en el sentido de Levi-Civita

En $I\!R^n$ un campo de vectores Y definido sobre una curva $\vec{\alpha}$ es paralelo si sus componentes respecto a la base canónica de campos de vectores en $I\!R^n$ son constantes, es decir, si la derivada covariante respecto al vector tangente a la curva es nula:

$$D_{\vec{\alpha}\,'}Y = \frac{dY}{dt} = 0.$$

Con esta situación como referencia, pasamos a definir el concepto de campo de vectores paralelo sobre una superficie.

Sea Y un campo de vectores tangente a una superficie $\mathcal{M}$ a lo largo de una curva $\vec{\alpha}(t) = \vec{\mathbf{x}}(u^1(t), u^2(t))$; es decir, $Y(t) \in T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathcal{M})$, $\;Y = \sum_{i=1}^{2} Y^i \vec{\mathbf{x}}_i$.

Definición 14.1 *Se dice que Y es un campo de vectores* paralelo *a lo largo de la curva $\vec{\alpha}$ si $\nabla_{\vec{\alpha}\,'}Y = \vec{0}$.*

En componentes, Y es paralelo a lo largo de $\vec{\alpha}$ si y sólo si

$$\frac{dY^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k Y^i \frac{du^j}{dt} = 0 \qquad (k = 1, 2). \tag{14.1}$$

Proposición 14.2 *Una curva $\vec{\gamma}$ sobre una superficie $\mathcal{M}$ es geodésica sobre $\mathcal{M}$ si y sólo si su campo de vectores tangente unitario es paralelo.*

Demostración.- Si $\vec{\gamma}$ es geodésica se tiene que $\vec{\gamma}''//\vec{\mathbf{N}}$ y $\|\vec{\gamma}'\| = c = cte$, entonces, de la ecuación de Gauss (11.1)

$$\vec{\gamma}'' = D_{\vec{\gamma}'}\vec{\gamma}' = \nabla_{\vec{\gamma}'}\vec{\gamma}' + II(\vec{\gamma}', \vec{\gamma}')\vec{\mathbf{N}},$$

resulta, $\nabla_{\vec{\gamma}'}\vec{\gamma}' = \nabla_{c\dot{\vec{\gamma}}}c\dot{\vec{\gamma}} = 0 \Rightarrow \nabla_{\dot{\vec{\gamma}}}\dot{\vec{\gamma}} = 0$.

El recíproco es inmediato. □

Proposición 14.3 *Sea $\vec{\alpha} : [0,1] \to \mathcal{M} \subset I\!R^3$ una curva sobre $\mathcal{M}$. Para cada vector $\vec{v} \in T_{\vec{\alpha}(0)}(\mathcal{M})$ existe un único campo de vectores diferenciable Y sobre $\vec{\alpha}$ tal que $Y(0) = \vec{v}$ e Y es paralelo a lo largo de $\vec{\alpha}$.*

La aplicación $P_\alpha : T_{\vec{\alpha}(0)}(\mathcal{M}) \to T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathcal{M})$, definida por $P_\alpha(\vec{v}) = Y_{\vec{\alpha}(t)}$, es un isomorfismo.

Demostración.- Sea (u^1, u^2) las coordenadas alrededor de $\vec{\alpha}(0)$. Un campo de vectores Y sobre $\vec{\alpha}$ es paralelo si y sólo si satisface a las ecuaciones (14.1).

La condición $Y(0) = v_0^1\vec{\mathbf{x}}_1 + v_0^2\vec{\mathbf{x}}_2$, define el valor inicial; y la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias dan una única solución diferenciable $Y^i(t)$, satisfaciendo dichas ecuaciones, sobre algún intervalo $[0, a]$. Esto define el campo de vectores Y.

Para $t \in [0, a]$ la aplicación $P_\alpha : T_{\vec{\alpha}(0)}(\mathcal{M}) \to T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathcal{M})$ es lineal por la linealidad de dichas ecuaciones diferenciales.

Si $t \in [0, 1]$, obtenemos P_α recubriendo el conjunto compacto $\vec{\alpha}([0, t])$ con un número finito de representaciones paramétricas y trasladando paralelamente en cada entorno coordenado via la solución del sistema dado. □

Definición 14.4 *La aplicación $P_\alpha : T_{\vec{\alpha}(0)}(\mathcal{M}) \to T_{\vec{\alpha}(t)}(\mathcal{M})$, se denomina* transporte paralelo de Levi-Civita *de $\vec{v} \in T_{\vec{\alpha}(0)}(\mathcal{M})$ a lo largo de $\vec{\alpha}$.*

Proposición 14.5 *El transporte paralelo a lo largo de una curva conserva el producto escalar de dos vectores. En consecuencia, conserva también la longitud de los vectores y el ángulo entre ellos.*

Demostración.- Sean Y, Z dos campos de vectores paralelos a lo largo de una curva $\vec{\alpha}$, para comprobar que su producto escalar es constante, demostremos que su derivada es nula:

$$\begin{aligned}\frac{d(Y\cdot Z)}{dt} &= \frac{dY}{dt}\cdot Z + Y\cdot\frac{dZ}{dt} = \\ &= \left(\nabla_{\vec{\alpha}'}Y + II(\vec{\alpha}', Y)\vec{\mathbf{N}}\right)\cdot Z + Y\cdot\left(\nabla_{\vec{\alpha}'}Z + II(\vec{\alpha}', Z)\vec{\mathbf{N}}\right) = \\ &= \nabla_{\vec{\alpha}'}Y\cdot Z + Y\cdot\nabla_{\vec{\alpha}'}Z = 0.\end{aligned}$$

□

Proposición 14.6 *Si dos superficies son mutuamente tangentes a lo largo de una curva, entonces las derivadas covariantes de un campo de vectores tangente a ambas superficies a lo largo de la curva, coinciden.*

Demostración.- Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^*$ dichas superficies con derivadas covariantes ∇ y ∇^*, e Y un campo de vectores a lo largo de la curva $\vec{\alpha}$ (curva intersección) tangente a ambas superficies, entonces

$$\frac{dY}{dt} = \nabla_{\vec{\alpha}\,'} Y + II(\vec{\alpha}\,', Y)\vec{\mathbf{N}} = \nabla^*_{\vec{\alpha}\,'} Y + II^*(\vec{\alpha}\,', Y)\vec{\mathbf{N}}^*$$

y como $\vec{\mathbf{N}} = \pm\vec{\mathbf{N}}^*$, se tiene que

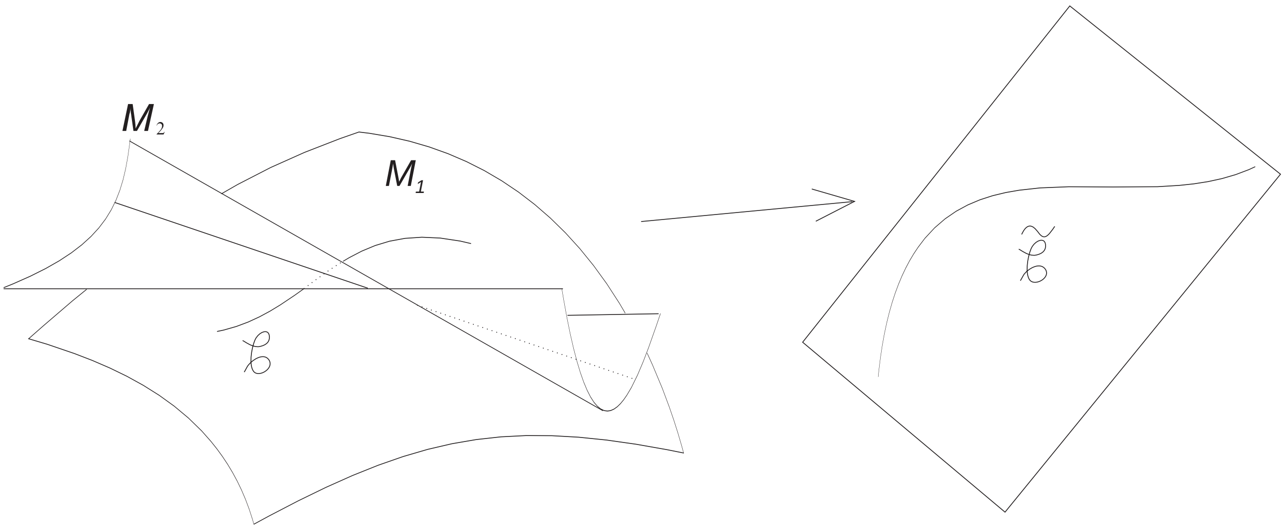
$$\nabla_{\vec{\alpha}\,'} Y = \nabla^*_{\vec{\alpha}\,'} Y.$$

$\square$

Aplicación: Determinación geométrica de campos paralelos

Sea $\mathcal{C}$ una curva contenida en una superficie $\mathcal{M}_1$. Consideremos la familia uniparamétrica de planos tangentes a $\mathcal{M}_1$ en los puntos de $\mathcal{C}$; la superficie envolvente $\mathcal{M}_2$ de esta familia de planos es una superficie desarrollable, tangente a $\mathcal{M}_1$ a lo largo de $\mathcal{C}$.

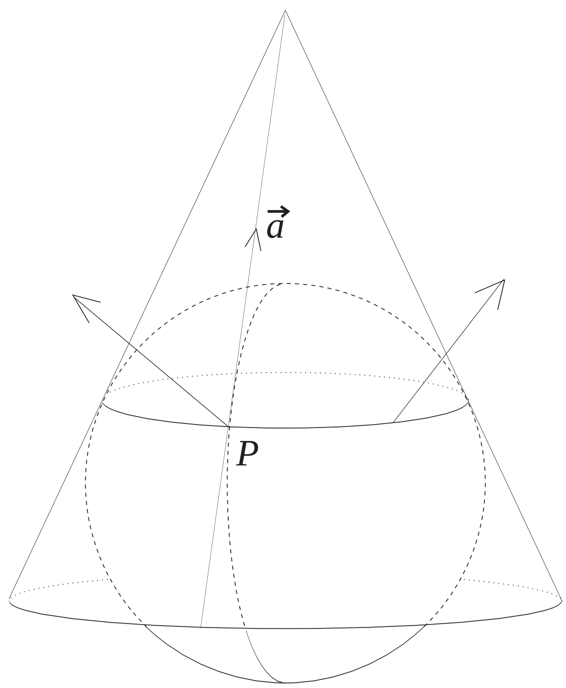
$\mathcal{M}_2$ es (localmente) isométrica al plano (Proposición 12.8). Consideremos la imagen $\widetilde{\mathcal{C}}$ en el plano de la curva $\mathcal{C}$ en $\mathcal{M}_2$ mediante esta isometría.



Como la derivada covariante de un campo de vectores tangente a $\mathcal{M}_1$ y a $\mathcal{M}_2$ a lo largo de $\mathcal{C}$ coinciden, éstas coinciden con la derivada ordinaria del campo imagen en el plano a lo largo de la curva $\widetilde{\mathcal{C}}$, respecto al parámetro de la curva.

Apliquemos este hecho en el siguiente

Ejemplo 14.7 Consideremos una esfera. Tomemos un vector $\vec{a}$ en un punto P tangente al meridiano que pasa por P, y encontremos el resultado en P del transporte paralelo de $\vec{a}$ a lo largo de la circunferencia de latitud al dar una vuelta.



La superficie desarrollable tangente es, en este caso, un cono circunscrito a la esfera y el vector $\vec{a}$ queda en una generatriz rectilínea. Cortando el cono a lo largo de esta generatriz y desarrollándolo en el plano tenemos como imagen de la circunferencia común a la esfera y al cono, un arco de circunferencia. Efectuamos a lo largo de éste el trasladado paralelo del vector $\vec{a}$; realizamos el proceso inverso y tendremos el vector tangente a la esfera en P imagen de $\vec{a}$ mediante el transporte paralelo a lo largo de la circunferencia de latitud, el cual no coincide con $\vec{a}$, a menos que dicha circunferencia sea el ecuador de la esfera.

14.2 Integrabilidad del transporte paralelo

El transporte paralelo de un vector depende de la curva sobre la superficie a lo largo de la cual éste se efectua; es decir, si dos puntos P y Q están conectados por dos arcos distintos y se da un vector $\vec{a}$ tangente en P, el transporte paralelo de $\vec{a}$ hasta Q a lo largo de los dos arcos dará, en general, dos vectores distintos en Q. También el transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada, en general, es un vector diferente del inicial. Esto se se ve claramente en el Ejemplo 14.7.

Definición 14.8 *Se dice que el transporte paralelo sobre la superficie $\mathcal{M}$ es* integrable *cuando es independiente de la curva sobre la cual se efectua.*

Proposición 14.9 *El transporte paralelo sobre una superficie $\mathcal{M}$ es integrable si y sólo si su curvatura de Gauss es igual a cero.*

Para tratar de caracterizar la integrabilidad del transporte paralelo tengamos en cuenta que el campo paralelo $Y = \sum_{i=1}^{2} Y^i \vec{\mathbf{x}}_i$, tiene por componentes Y^i funciones solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales (14.1):

$$\frac{dY^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k Y^i \frac{du^j}{dt} = 0 \qquad (k = 1, 2)$$

y la integrabilidad del transporte paralelo es equivalente a afirmar que las funciones Y^i son funciones tan solo del punto (es decir, de u^1 y u^2) y no de la curva sobre la

que se desplaza (es decir, de t). Entonces, como

$$\frac{dY^k}{dt} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} \frac{du^i}{dt},$$

tendremos las ecuaciones (14.1) en la forma

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^{2} Y^j \Gamma^k_{ij} \right) \frac{du^i}{dt} = 0 \qquad (k = 1, 2)$$

y si el sistema se satisface a lo largo de toda curva, será equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$\frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^{2} Y^j \Gamma^k_{ij} = 0 \qquad (i, k = 1, 2), \tag{14.2}$$

por lo que para que el desplazaminto paralelo sea independiente del camino el sistema (14.2) ha de ser integrable. Pero (14.2) es integrable si y sólo si

$$\frac{\partial^2 Y^\ell}{\partial u^i \partial u^k} = \frac{\partial^2 Y^\ell}{\partial u^k \partial u^i} \qquad (i, k, \ell = 1, 2)$$

es decir, si y sólo si

$$\frac{\partial}{\partial u^k} \left(\sum_{j=1}^{2} Y^j \Gamma^\ell_{ij} \right) - \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_{j=1}^{2} Y^j \Gamma^\ell_{jk} \right) = 0,$$

de donde se sigue que:

$$\sum_{j=1}^{2} Y^j \left(\frac{\partial \Gamma^\ell_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{jk}}{\partial u^i} \right) - \sum_{h=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \Gamma^j_{hk} \Gamma^\ell_{ij} - \sum_{j=1}^{2} \Gamma^j_{hi} \Gamma^\ell_{jk} \right) Y^h = 0$$

o, equivalentemente

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial \Gamma^\ell_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{jk}}{\partial u^i} - \sum_{h=1}^{2} \left(\Gamma^h_{jk} \Gamma^\ell_{ih} - \Gamma^h_{ij} \Gamma^\ell_{hk} \right) \right) Y^j = 0$$

y, puesto que es preciso que esta última relación se verifique para todo campo de vectores, resulta que el transporte paralelo es integrable si y sólo si

$$\frac{\partial \Gamma^\ell_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{jk}}{\partial u^i} - \sum_{h=1}^{2} \left(\Gamma^h_{jk} \Gamma^\ell_{ih} - \Gamma^h_{ij} \Gamma^\ell_{hk} \right) = R^\ell_{kij} = 0,$$

esto implica que la curvatura de Gauss vale

$$K = -\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{\displaystyle\sum_{\ell=1}^{2} g_{2\ell}R_{121}^{\ell}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = 0,$$

Y como el coeficiente R_{1212} determina todos los R_{ijk}^h (ver Nota 11.9), el transporte paralelo es completamente integrable si y sólo si $K = 0$. □

14.3 Transporte paralelo y curvatura geodésica

Damos ahora una interpretación geométrica de la curvatura geodésica en términos del transporte paralelo.

Proposición 14.10 *Sea $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ una representación paramétrica de una superficie orientada $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$ una curva sobre $\mathcal{M}$ de ecuaciones paramétricas $u^i = u^i(s)$ (s, parámetro arco), $Y(s)$ un campo de vectores tangente a $\mathcal{M}$ a lo largo de $\mathcal{C}$ unitario y paralelo, $\theta(s)$ el ángulo orientado entre $Y(s)$ y $\vec{t}(s)$, entonces*

$$\frac{d\theta}{ds} = \kappa_g,$$

donde κ_g denota la curvatura geodésica de $\mathcal{C}$.

Observemos en primer lugar que, puesto que el desplazamiento o transporte paralelo conserva el ángulo entre vectores, la consideración de un campo de vectores paralelo u otro no es fundamental, pues si cambiamos de campo de vectores paralelo a lo largo de $\mathcal{C}$, eso será cambiar θ aumentándole un ángulo constante (el ángulo entre ambos campos paralelos) y eso no afecta a la derivada de θ.

Ahora, claramente a lo largo de la curva, $\cos\theta = Y(s) \cdot \vec{t}(s)$, y, por tanto

$$-\operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{ds} = \frac{d}{ds}(Y(s)\cdot\vec{t}(s)) = \nabla_{\vec{t}}Y \cdot \vec{t} + Y \cdot \nabla_{\vec{t}}\vec{t}.$$

Pero $\nabla_{\vec{t}}Y = 0$, puesto que Y es paralelo a lo largo de $\mathcal{C}$. Por otra parte, recordando que $\nabla_{\vec{t}}\vec{t} = \vec{k}_g = \kappa_g\vec{u}$, siendo $\vec{u} = \vec{\mathbf{N}} \times \vec{t}$, por tanto,

$$-\operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{ds} = \kappa_g\, Y \cdot \vec{u}$$

y esta fórmula es válida para todo campo de vectores Y paralelo a lo largo de $\mathcal{C}$. Entonces, fijando arbitrariamente un punto s_0 de la curva, podemos elegir el campo Y de forma que en s_0 sea $Y(s_0) = \vec{u}(s_0)$; entonces el ángulo $\theta(s_0) = -\pi/2$, $Y(s_0)\cdot\vec{u}(s_0) = 1$, $\operatorname{sen}\theta(s_0) = -1$ y tenemos

$$\frac{d\theta}{ds}(s_0) = \kappa_g(s_0).$$

Puesto que s_0 es arbitrario, tenemos la igualdad deseada. □

TEMA XV

Teorema de Gauss-Bonnet

En este Tema presentamos el teorema de Gauss–Bonnet y algunas de sus consecuencias. La dificultad de su demostración está en ciertos hechos topológicos. Estos hechos serán expuestos sin demostración.

Una primera versión del teorema fue dada por Gauss en su famoso artículo "Disquisitiones generales circa superficies curvas" 1827; Ges. Werke 4, donde trabaja con triángulos geodésicos sobre superficies (esto es, triángulos cuyos lados son arcos de geodésicas). A grosso modo, afirma que el exceso sobre π de la suma de los ángulos interiores α, β, γ de un triángulo geodésico $\mathcal{T}$ es igual a la integral de la curvatura de Gauss K sobre $\mathcal{T}$; esto es

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_{\mathcal{T}} K\, dA.$$

Por ejemplo, si $K \equiv 0$, obtenemos $\alpha + \beta + \gamma = \pi$; se trata de una extensión del teorema de Thales para la geometría de las superficies de curvatura nula.

Cuando $K \equiv 1$, obtenemos

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = area(\mathcal{T}) > 0.$$

Así, sobre la esfera unidad, la suma de los ángulos intersección de un triángulo geodésico es mayor que π, y el exceso sobre π es exactamente el área de $\mathcal{T}$.

Similarmente, sobre la pseudoesfera, superficie de curvatura de Gauss constante negativa, la suma de los ángulos interiores de todo triángulo geodésico es menor que π.

La generalización de estos resultados a un dominio (abierto y conexo) acotado por curvas regulares no geodésicas es debida a Bonnet.

Para extenderlo aún más, a superficies compactas, son necesarias algunas consideraciones topológicas. De hecho, una de las más importantes versiones del teorema de Gauss-Bonnet es que da una notable relación entre la topología de una superficie compacta y la integral de su curvatura.

15.1 Versión local del teorema de Gauss-Bonnet

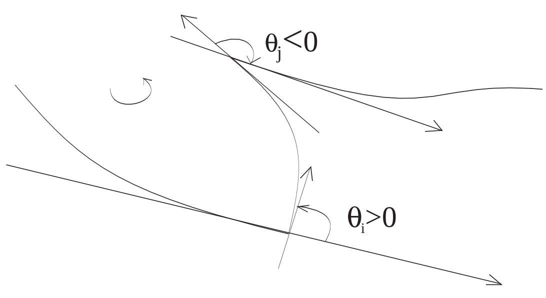
Veamos en primer lugar una versión local del teorema de Gauss-Bonnet. Para lo cual necesitamos una serie de definiciones.

Definición 15.1 *Sea $\vec{\alpha} : [0, b] \to \mathcal{M}$ una aplicación continua de un intervalo cerrado $[0, b]$ en una superficie $\mathcal{M}$. Decimos que $\vec{\alpha}$ es* una curva regular a trozos, cerrada y simple *si*

1. *Existe una subdivisión $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = b$, de $[0, b]$ tal que $\vec{\alpha}$ es diferenciable y regular en cada $[t_i, t_{i+1}]$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$.*
2. *$\vec{\alpha}(0) = \vec{\alpha}(b)$.*
3. *Si $t, t' \in [0, b[$, $t \neq t'$, entonces $\vec{\alpha}(t) \neq \vec{\alpha}(t')$.*

Definición 15.2 *Los puntos $\vec{\alpha}(t_i)$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$ se llaman* vértices *de $\vec{\alpha}$.*

Nota 15.3 Por las condiciones de regularidad, para cada vértice $\vec{\alpha}(t_i)$, existe límite por la izquierda, es decir, para $t < t_i$ $\lim_{t \to t_i^-} \vec{\alpha}\,'(t) = \vec{\alpha}\,'(t_i - 0) \neq 0$. Y límite por la derecha, es decir, para $t > t_i$ $\lim_{t \to t_i^+} \vec{\alpha}\,'(t) = \vec{\alpha}\,'(t_i + 0) \neq 0$.

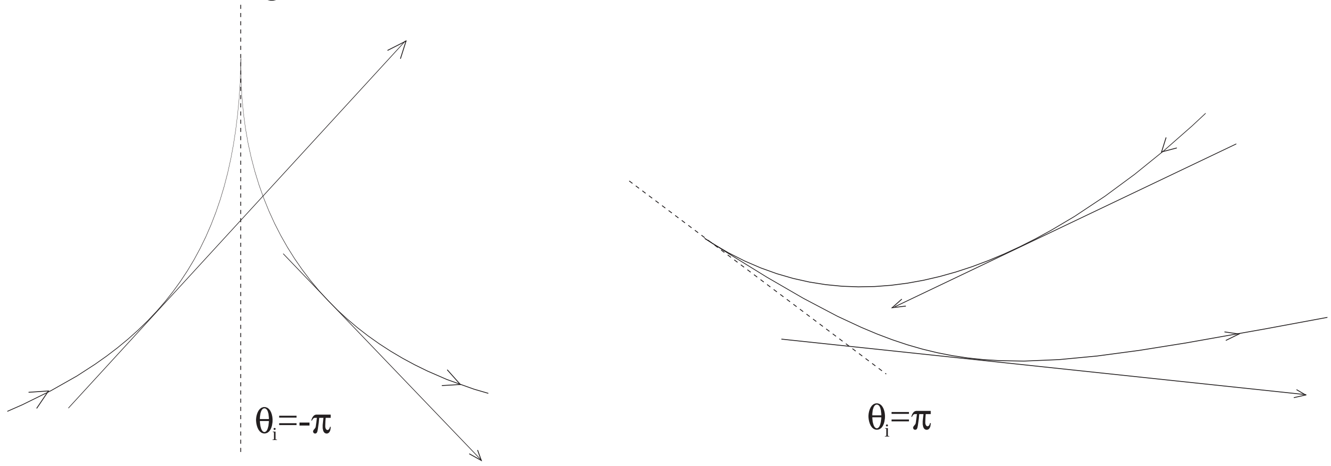


Supongamos que $\mathcal{M}$ está orientada y sea θ_i, $-\pi \leq \theta_i \leq \pi$ el ángulo que foman $\vec{\alpha}\,'(t_i - 0)$ y $\vec{\alpha}\,'(t_i + 0)$; el signo de θ_i está dado por el determinante

$$[\vec{\alpha}\,'(t_i - 0), \vec{\alpha}\,'(t_i + 0), \vec{\mathbf{N}}].$$

Definición 15.4 *El ángulo θ_i, $-\pi \leq \theta_i \leq \pi$, se denomina* ángulo exterior *en el vértice $\vec{\alpha}(t_i)$.*

Si el vértice es una **cúspide**, esto es $|\theta_i| = \pi$. Elegimos el signo de θ_i como sigue: Por la condición de regularidad, podemos ver que existe un mínimo $\varepsilon > 0$ tal que el determinante $[\vec{\alpha}\,'(t_i - \delta), \vec{\alpha}\,'(t_i + \delta), \vec{\mathbf{N}}]$ no cambia de signo para todo δ, $0 < \delta < \varepsilon$. Damos a θ_i el signo de este determinante.



Definición 15.5 *Un* dominio D *sobre una superficie* $\mathcal{M}$ *es un subconjunto* $D \subset \mathcal{M}$ *abierto y conexo.*

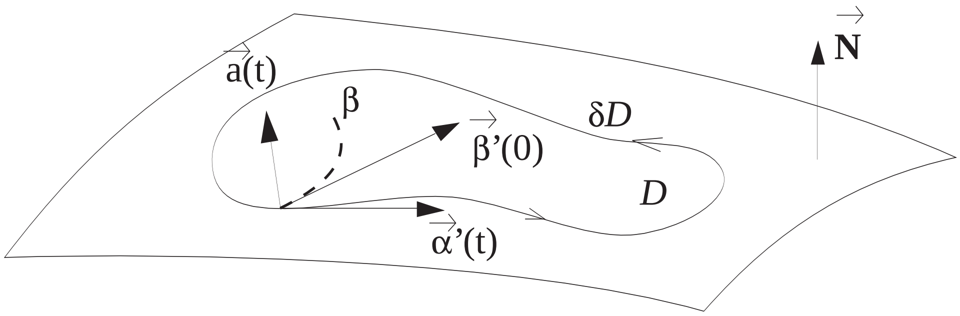
Definición 15.6 *Un dominio sobre una superficie se dice que es* simplemente conexo *si toda curva cerrada o curva que une dos puntos de su borde divide al dominio en dos o más partes disjuntas. O equivalentemente, toda curva cerrada es homótopa al cero.*

Ejemplo 15.7 La superficie de la esfera es simplemente conexa. No ocurre lo mismo con la superficie del toro; en efecto, un meridiano del toro es una curva cerrada que no lo divide en partes conexas.

Definición 15.8 *Se denomina* dominio con borde regular *sobre* $\mathcal{M}$ *a un dominio* $D \subset \mathcal{M}$ *tal que el borde* $\partial D = \overline{D} - \overset{\circ}{D}$ *es la imagen de una curva* $\vec{\alpha} : I \to \mathcal{M}$ *regular a trozos, cerrada y simple.*

Definición 15.9 *Decimos que el borde* ∂D *de un dominio* D *en una superficie orientada* $\mathcal{M}$ *está* positivamente orientado *si la base ortogonal positiva* $\{\vec{\alpha}\,'(t), \vec{a}(t)\}$ *satisface la condición de que* $\vec{a}(t)$ *apunta hacia el interior de* D.

Más precisamente, para toda curva $\vec{\beta} : J \to D$ tal que $\vec{\beta}(0) = \vec{\alpha}(t)$ y $\vec{\beta}\,'(0) \neq \vec{\alpha}\,'(t)$ tenemos que $\vec{\beta}\,'(0) \cdot \vec{a}(t) > 0$.



Intuitivamente, esto significa que si se recorre la curva $\vec{\alpha}$ en la dirección positiva y con la cabeza dirigida hacia la normal $\vec{\mathbf{N}}$, entonces el dominio D queda a la izquierda.

Consideremos ahora una parametrización $\vec{\mathbf{x}} : U \subset I\!R^2 \to I\!R^3$ de $\mathcal{M}$ compatible con la orientación y D un dominio en $\mathcal{M}$ tal que $\overline{D} = D \cup \partial D \subset \vec{\mathbf{x}}(U)$. Si $f : \mathcal{M} \to I\!R$ es una función diferenciable, es fácil ver que la integral

$$\iint_{\vec{\mathbf{x}}^{-1}(D)} f(u^1, u^2)\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du^1\, du^2$$

no depende de la parametrización $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ elegida en la clase de la orientación de $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$.

Definición 15.10 *A esta integral se denomina* integral de f sobre D*, y se denota por*

$$\iint_D f\, dA.$$

Sea $\vec{v}$ un vector unitario tangente a una superficie $\mathcal{M}$ en uno de los puntos P del borde ∂D de un dominio $D \subset \mathcal{M}$ simplemente conexo, y sea Y el campo de vectores obtenido por transporte paralelo a lo largo de la curva borde de D. Al volver al punto de partida obtenemos un vector unitario, en general, distinto de $\vec{v}$. Nos proponemos, entonces, calcular el ángulo $\Delta\phi$ que ha girado el vector como consecuencia del transporte paralelo.

Proposición 15.11 *Sea ∂D el borde diferenciable a trozos de un dominio D simplemente conexo sobre una superficie $\mathcal{M}$ de clase C^3 tal que la clausura de D esté contenida en un abierto imagen de una representación paramétrica regular $\vec{\mathbf{x}} : U \to \mathcal{M}$. Entonces el ángulo de rotación resultante del transporte paralelo de un vector a lo largo del borde de D está dado por*

$$\Delta\phi = \iint_{\vec{\mathbf{x}}^{-1}(D)} K\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}du^1\, du^2 = \iint_D K\, dA,$$

donde K es la curvatura de Gauss y dA el elemento de area.

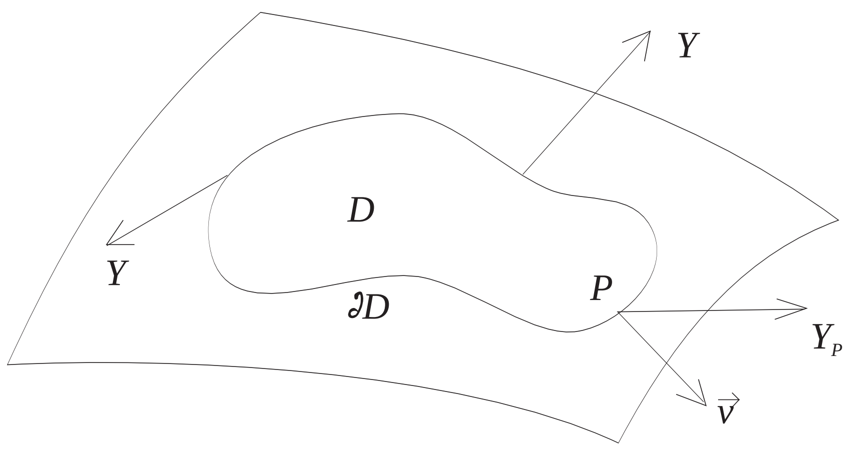
Demostración.- Introduzcamos sobre el borde de D una parametrización natural (longitud de arco) $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ y de tal forma que dé una orientación positiva.

Sea X un campo de vectores tangente unitario sobre $\vec{\mathbf{x}}(U)$. Para cada $\vec{v} \in T_P(M)$ unitario, en un punto arbitrario $P \in \partial D \subset M$ existe Y, campo de vectores paralelo a lo largo de ∂D con valor inicial $Y_P = \vec{v}$. Denotemos por Z el campo de vectores tangente obtenido a partir de X girando un ángulo igual a $\pi/2$ en sentido positivo en cada punto, es decir, $Z = \vec{\mathbf{N}} \times X$.

Si ϕ es el ángulo que forman X e Y sobre el borde ∂D, $\cos\phi = X \cdot Y$; de donde

$$\frac{d}{ds}(\cos\phi) = -\operatorname{sen}\phi\frac{d\phi}{ds} = \frac{d}{ds}(X \cdot Y) = \nabla_{\vec{\alpha}}X \cdot Y + X \cdot \nabla_{\vec{\alpha}}Y = Y \cdot \nabla_{\vec{\alpha}}X,$$

puesto que $\nabla_{\vec{\alpha}}Y = 0$, al ser Y paralelo.



Si s_0 es el parámetro del un punto P arbitrario sobre ∂D, escogemos el campo paralelo Y de forma tal que

$$Y(s_0) = Z(u^1(s_0), u^2(s_0)).$$

Así, $\phi(s_0) = \pi/2$, $\operatorname{sen}\phi(s_0) = 1$. Por tanto, en s_0

$$\frac{d\phi}{ds}_{|s_0} = -Z_{|s_0} \cdot \nabla_{\dot{\vec{\alpha}}} X_{|s_0}.$$

Al variar s_0, esta identidad se verifica en todos los puntos del borde:

$$\frac{d\phi}{ds} = -Z \cdot \nabla_{\dot{\vec{\alpha}}} X.$$

Por la ecuación de Gauss (11.1), se sigue que

$$\frac{d\phi}{ds} = -Z \cdot \frac{dX}{ds}$$

y, por tanto, poniendo $\vec{\mathbf{x}}^{-1}(D) = \widetilde{D}$ y $\vec{\mathbf{x}}^{-1}(\partial D) = \partial\widetilde{D}$,

$$\Delta\phi = -\int_{\partial\widetilde{D}} Z \cdot \frac{dX}{ds}\, ds = -\int_{\partial\widetilde{D}} \left(Z \cdot \frac{\partial X}{\partial u^1}\, du^1 + Z \cdot \frac{\partial X}{\partial u^2}\, du^2 \right).$$

Como las funciones $Z \cdot \dfrac{\partial X}{\partial u^1}$ y $Z \cdot \dfrac{\partial X}{\partial u^2}$ están definidas en $D \cup \partial D$, podemos aplicar la fórmula de Green en el plano, siguiente

$$\oint_{\partial\mathcal{C}} M\, dx + N\, dy = \iint_{\mathcal{C}} (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}) dx\, dy.$$

Y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= -\iint_{\widetilde{D}} \left(\frac{\partial(Z\frac{\partial X}{\partial u^2})}{\partial u^1} - \frac{\partial(Z\frac{\partial X}{\partial u^1})}{\partial u^2} \right) du^1\, du^2 = \\
&= -\iint_{\widetilde{D}} \left(\frac{\partial Z}{\partial u^1}\frac{\partial X}{\partial u^2} - \frac{\partial Z}{\partial u^2}\frac{\partial X}{\partial u^1} \right) du^1\, du^2 = \\
&= \iint_{\widetilde{D}} \left(\frac{\partial X}{\partial u^1}\frac{\partial Z}{\partial u^2} - \frac{\partial X}{\partial u^2}\frac{\partial Z}{\partial u^1} \right) du^1\, du^2.
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\{X, Z, \vec{\mathbf{N}}\}$ forma una base ortonormal, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u^i} &= \qquad\qquad \lambda_i Z \quad +\mu_i \vec{\mathbf{N}} \\ \frac{\partial Z}{\partial u^i} &= -\lambda_i X \qquad\qquad +\nu_i \vec{\mathbf{N}} \qquad\qquad (i=1,2) \\ \frac{\partial \vec{\mathbf{N}}}{\partial u^i} &= -\mu_i X \quad -\nu_i Z \end{aligned}$$

Resulta entonces que

$$\frac{\partial X}{\partial u^1}\frac{\partial Z}{\partial u^2} - \frac{\partial X}{\partial u^2}\frac{\partial Z}{\partial u^1} = \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1,$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{N}}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{N}}}{\partial u^2} = (\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1)\vec{\mathbf{N}}.$$

Y de ambas y de la definición del operador forma, resulta

$$\frac{\partial X}{\partial u^1}\frac{\partial Z}{\partial u^2} - \frac{\partial X}{\partial u^2}\frac{\partial Z}{\partial u^1} = (S(\vec{\mathbf{x}}_1) \times S(\vec{\mathbf{x}}_2)) \cdot \vec{\mathbf{N}}.$$

Como sabemos de la Proposición 10.23 (o Ejercicio 202) que

$$S(\vec{\mathbf{x}}_1) \times S(\vec{\mathbf{x}}_2) = K\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2,$$

resulta, finalmente

$$\frac{\partial X}{\partial u^1}\frac{\partial Z}{\partial u^2} - \frac{\partial X}{\partial u^2}\frac{\partial Z}{\partial u^1} = K\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\ \vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{N}}$$

En definitiva:

$$\Delta\phi = \iint_{\widetilde{D}} K\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1\, du^2.$$

□

Ejemplo 15.12 Dado un dominio D sobre una esfera de radio a

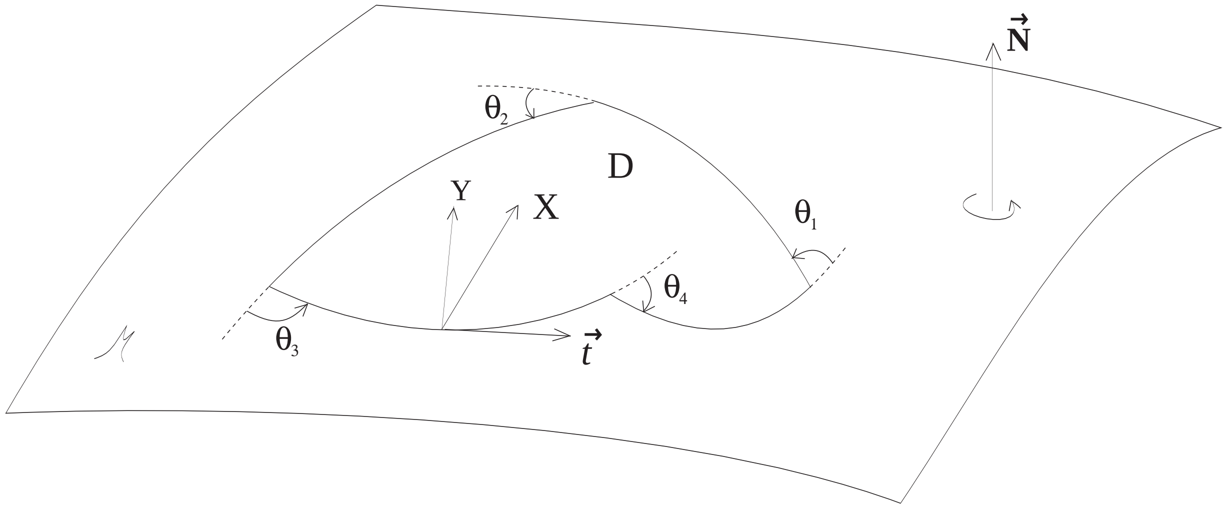
$$\Delta\phi = \iint_D K\, dA = \frac{1}{a^2}\ \textit{área de } D.$$

Teorema 15.13 (Gauss-Bonnet) *Si D es un dominio simplemente conexo sobre una superficie $\mathcal{M}$ de clase C^3 y el borde ∂D es una curva diferenciable a trozos de clase C^2, de tal forma que $D \cup \partial D$ está contenida en la imagen $\vec{\mathbf{x}}(U)$ de una representación paramétrica de $\mathcal{M}$, entonces se tiene la siguiente fórmula de Gauss–Bonnet*

$$\iint_D K\, dA + \int_{\partial D} \kappa_g\, ds + \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 2\pi,$$

donde K es la curvatura de Gauss, dA el elemento de area, κ_g la curvatura geodésica de ∂D y θ_i los ángulos exterior de los vértices del borde.

Demostración.-



Sea X un campo de vectores tangente unitario sobre $\vec{\mathbf{x}}(U)$.

Supongamos que ∂D está parametrizada por la longitud de arco, y sea $\vec{t}$ el campo de vectores unitario al borde, el cual está definido en todos los puntos salvo en los vértices. Lo mismo ocurre con la función ψ que determina el ángulo entre X y $\vec{t}$ en cada punto.

Es claro que al recorrer el borde ∂D el ángulo ψ cambia y su valor salta θ_i cuando se pasa por el vértice i–ésimo. Al dar una vuelta completa a lo largo de ∂D el incremento de este ángulo será exactamente 2π.

Consideremos ahora un campo de vectores auxiliar Y obtenido por transporte paralelo a lo largo de todo ∂D, se tiene

$$\widehat{(X,\vec{t})} = \widehat{(X,Y)} + \widehat{(Y,\vec{t})}$$

o bien, con las notaciones $\psi = \widehat{(X,\vec{t})}$, $\phi = \widehat{(X,Y)}$, $\chi = \widehat{(Y,\vec{t})}$,

$$\psi = \phi + \chi.$$

En consecuencia:

$$\Delta\psi = \Delta\phi + \Delta\chi.$$

Según la Proposición 14.10

$$\frac{d\chi}{ds} = \kappa_g,$$

y puesto que los saltos en los vértices suman $\sum_{i=1}^{n} \theta_i$, resulta

$$\Delta\chi = \int_{\partial D} \kappa_g \, ds + \sum_{i=1}^{n} \theta_i.$$

Finalmente, por la Proposición 15.11,

$$\Delta\phi = \iint_D K \, dA.$$

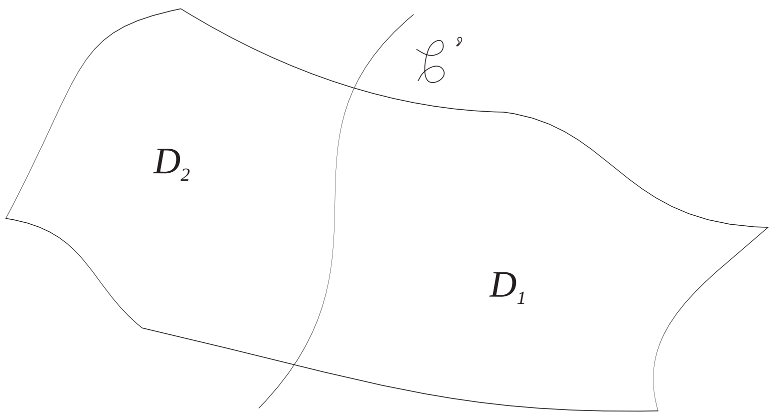
Por tanto, resulta la fórmula de Gauss–Bonnet

$$\iint_D K\,dA + \int_{\partial D} \kappa_g\,ds + \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 2\pi.$$

□

A pesar que hemos probado el teorema bajo una hipótesis restrictiva sobre el dominio D, el teorema es todavía válido para dominios simplemente conexos de clase más amplia. De hecho, si el dominio D puede ser descompuesto en un número finito de dominios que no se superpongan dos a dos, tales que las hipótesis del teorema sean válidos para cada uno de los dominios separadamente, entonces la conclusión del teorema es válida para el dominio total, incluso si el dominio total no admitiera un campo de vectores unitario.

Para dar una idea de como extenderemos el resultado, consideremos el caso de un dominio D descompuesto en dos dominios D_1 y D_2.



Sea $\mathcal{C} = \partial D$ el borde D y $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ las partes de $\mathcal{C}$ en D_1, D_2, respectivamente, y $\mathcal{C}'$ la curva que separa D_1 y D_2. Así $\partial D = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, $\partial D_1 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}'$ y $\partial D_2 = \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}'$. Representemos por θ_j^1 los ángulos exteriores en los vértices del borde ∂D_1 y por θ_k^2 los ángulos exteriores de los vértices en el borde ∂D_2.

Entonces, para los dominios D_1 y D_2 se tiene

$$\iint_{D_1} K\,dA + \oint_1 \kappa_g\,ds + \sum_{j=1}^{n_1} \theta_j^1 = 2\pi \qquad \iint_{D_2} K\,dA + \oint_2 \kappa_g\,ds + \sum_{k=1}^{n_2} \theta_k^2 = 2\pi \tag{15.1}$$

donde $\oint_1$ y $\oint_2$ son las integrales de línea a lo largo de los contornos respectivos. Con la orientación adecuada sobre $\mathcal{C}'$, se tiene

$$\oint_1 \kappa_g\,ds = \int_{\mathcal{C}_1} \kappa_g\,ds + \int_{\mathcal{C}'} \kappa_g\,ds, \qquad \oint_2 \kappa_g\,ds = \int_{\mathcal{C}_2} \kappa_g\,ds - \int_{\mathcal{C}'} \kappa_g\,ds.$$

Por tanto,

$$\oint_1 \kappa_g\,ds + \oint_2 \kappa_g\,ds = \oint_{\mathcal{C}} \kappa_g\,ds.$$

Ahora, si denotamos por θ_i los ángulos del borde de $D = D_1 \cup D_2$, se ve inmediatamente, que la suma de todos los ángulos θ_j^1 y θ_k^2 es igual a la suma de los θ_i menos

cuatro rectos. Esto es
$$\sum_{j=1}^{n_1} \theta_j^1 + \sum_{k=1}^{n_2} \theta_k^2 = \sum_{i=1}^{n} \theta_i + 2\pi.$$

Así, sumando, término a término, las ecuaciones (15.1), se obtiene

$$\iint_{D_1} K\,dA + \iint_{D_2} K\,dA + \oint_1 \kappa_g\,ds + \oint_2 \kappa_g\,ds + \sum_{j=1}^{n_1} \theta_j^1 + \sum_{k=1}^{n_1} \theta_k^2 = 4\pi,$$

es decir,

$$\iint_D K\,dA + \int_{\mathcal{C}} \kappa_g\,ds + \sum_{i=1}^{n} \theta_i + 2\pi = 4\pi,$$

que es la fórmula de Gauss-Bonnet para D.

Consideremos ahora algunos casos particulares donde se hace más simple la fórmula de Gauss-Bonnet:

1. Si el borde de ∂D de D es diferenciable de clase C^2, entonces

$$\iint_D K\,dA + \int_{\mathcal{C}} \kappa_g\,ds = 2\pi.$$

2. (a) Si el borde de D es un polígono geodésico, es decir, los trozos diferenciables de $\mathcal{C}$ son geodésicos, entonces $\kappa_g = 0$ y se tiene

$$\iint_D K\,dA + \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 2\pi.$$

   (b) Si denotamos los ángulos interiores de un polígono geodésico de n lados por $\phi_1, ..., \phi_n$, se tiene $\theta_i = \pi - \phi_i$ y

$$\iint_D K\,dA + \sum_{i=1}^{n} (\pi - \phi_i) = 2\pi, \qquad \Rightarrow \qquad \iint_D K\,dA + n\pi - \sum_{i=1}^{n} \phi_i = 2\pi.$$

$$\iint_D K\,dA = \sum_{i=1}^{n} \phi_i - \pi(n-2).$$

En particular, para triángulos geodésicos con ángulos interiores α, β, γ se tiene:

$$\iint_D K\,dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Definición 15.14 *A la diferencia* $\Delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ *se denomina* defecto angular del triángulo.

Sobre el plano euclídeo ($K = 0$), $\Delta = 0$. Si $K > 0$, $\Delta < 0$ y si $K < 0$, $\Delta > 0$. Sobre una superficie de curvatura constante, Δ es proporcional al área, pues

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_D K \, dA = K \iint_D dA = K(\acute{a}rea\ D).$$

En el caso particular de una esfera de radio a, $K = 1/a^2$, y se obtiene

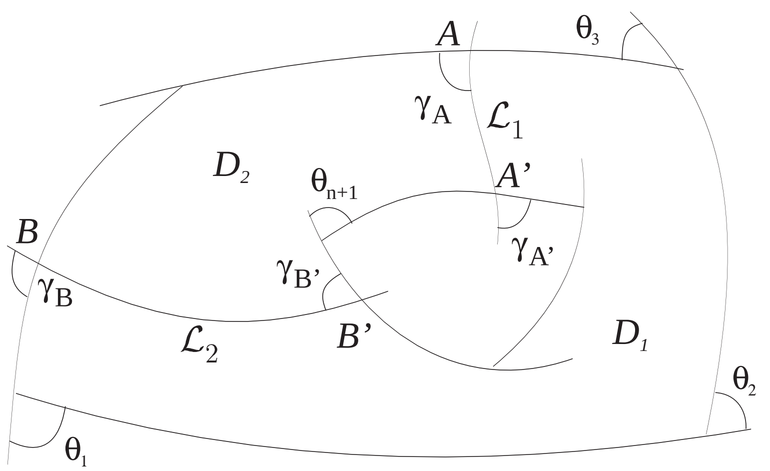
$$\acute{a}rea\ D = a^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = -a^2\Delta.$$

En particular, si D es un cuadrante de la esfera $\Delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = -\pi/2$; por tanto

$$\acute{a}rea\ del\ cuadrante = \frac{a^2\pi}{2}, \qquad \acute{a}rea\ de\ la\ esfera = 8\frac{a^2\pi}{2} = 4\pi a^2.$$

15.2 Fórmula de Gauss-Bonnet generalizada

Si el dominio D no es simplemente conexo la frontera del dominio no es una curva cerrada, sino que consta de varias curvas cerradas. La orientación del dominio induce una orientación sobre cada una de esas curvas componentes de la frontera.



Consideremos en primer lugar un dominio D en forma de anillo cuya frontera consta de las curvas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ (diferenciables a trozos). Mediante dos curvas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ conectamos un punto sobre $\mathcal{C}$ (A y B, respectivamente) con puntos en $\mathcal{C}'$ (A' y B', respectivamente) y así dividimos el anillo en dos dominios simplemente conexos que no se superponen D_1 y D_2.

Denotemos a la parte de $\mathcal{C}$ que pertenece a la frontera de D_1 (respectivamente D_2) por $\mathcal{C}_1$ (respectivamente $\mathcal{C}_2$), y análogamente para $\mathcal{C}'$ sería $\mathcal{C}'_1$ y $\mathcal{C}'_2$. Así el borde de D_1 consta de las curvas $\mathcal{C}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{C}'_1, \mathcal{L}_2$ y la de D_2 de $\mathcal{C}_2, -\mathcal{L}_2, \mathcal{C}'_2, -\mathcal{L}_1$, donde el signo – quiere decir con orientación opuesta.

Representemos por $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$, los ángulos orientados en los vértices de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}'_1$; y por $\theta_{m+1}, \theta_{m+2}, ..., \theta_n$ en los vértices de $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}'_2$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que los puntos A, A', B y B' son puntos de $\mathcal{C}$ o $\mathcal{C}'$ en los cuales la curva es regular, estos puntos son, sin embargo, vértices de los bordes de D_1 y D_2. Los ángulos en los vértices del borde de D_1 serán

$$\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m, \gamma_A, \gamma_{A'}, \gamma_B, \gamma_{B'}$$

y los de D_2 son

$$\theta_{m+1}, \theta_{m+2}, ..., \theta_n, \delta_A, \delta_{A'}, \delta_B, \delta_{B'}.$$

Observemos que

$$\gamma_A + \delta_A = \gamma_{A'} + \delta_{A'} = \gamma_B + \delta_B = \gamma_{B'} + \delta_{B'} = \pi.$$

Si aplicamos ahora el teorema de Gauss-Bonnet a cada dominio simplemente conexo, tenemos

$$\iint_{D_1} K\,dA + \int_{\mathcal{C}_1} \kappa_g\,ds + \int_{\mathcal{L}_1} \kappa_g\,ds + \int_{\mathcal{C}'_1} \kappa_g\,ds + \int_{\mathcal{L}_2} \kappa_g\,ds + \sum_{i=1}^{m} \theta_i + \gamma_A + \gamma_{A'} + \gamma_B + \gamma'_B = 2\pi,$$

$$\iint_{D_2} K\,dA + \int_{\mathcal{C}_2} \kappa_g\,ds - \int_{\mathcal{L}_1} \kappa_g\,ds + \int_{\mathcal{C}'_2} \kappa_g\,ds - \int_{\mathcal{L}_2} \kappa_g\,ds + \sum_{i=m+1}^{n} \theta_i + \delta_A + \delta_{A'} + \delta_B + \delta'_B = 2\pi.$$

Sumando, miembro a miembro, se tiene

$$\iint_{D} K\,dA + \int_{\mathcal{C}} \kappa_g\,ds + \int_{\mathcal{C}'} \kappa_g\,ds \sum_{i=1}^{n} \theta_i + 4\pi = 4\pi.$$

O lo que es lo mismo

$$\iint_{D} K\,dA + \int_{\partial D} \kappa_g\,ds + \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 0.$$

Si D tiene p agujeros, su frontera ∂D con $p+1$ componentes, se tiene la fórmula de Gauss–Bonnet generalizada:

$$\boxed{\iint_{D} K\,dA + \int_{\partial D} \kappa_g\,ds + \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 2\pi(1-p).}$$

15.3 La curvatura integral

Definición 15.15 *Dado un dominio D sobre una superficie (en particular, la misma superficie completa) se denomina* curvatura integral *del dominio D a*

$$\iint_D K\,dA = \iint_D K\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,du^1\,du^2.$$

Utilizando la fórmula de Gauss-Bonnet es fácil calcular la curvatura integral de algunas superficies cerradas.

Ejemplo 15.16 (Curvatura integral de la esfera) Descompongamos la esfera en dos dominios simplemente conexos D_1 y D_2 usando una curva cerrada $\mathcal{C}$ y regular. Esta curva sirve de frontera común de D_1 y D_2 pero con orientación opuesta. Se tiene

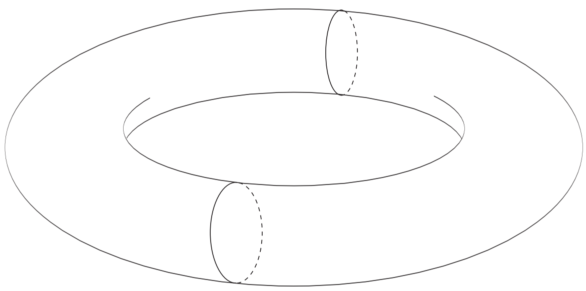
$$\iint_{D_1} K\,dA + \int_{\mathcal{C}} \kappa_g\,ds = 2\pi \qquad \text{y} \qquad \iint_{D_2} K\,dA - \int_{\mathcal{C}} \kappa_g\,ds = 2\pi,$$

por tanto, la curvatura integral de la esfera es

$$\iint_D K\,dA = 4\pi.$$

Nota 15.17 Observemos que para llegar a este resultado no hemos utilizado más propiedades de la esfera que la de que una curva cerrada corta a la esfera en dos dominios simplementes conexos. Por tanto, es cierto también para cualquier superficie cerrada que sea homeomorfa a la esfera. Así, todas ellas tendrán curvatura integral 4π con tal que satisfaga a las condiciones de regularidad que aseguran la existencia de la curvatura de Gauss K.

Ejemplo 15.18 (Curvatura integral del toro) El toro no es homeomorfo a la esfera, podemos cortar el toro en dominios como indica la figura, usando dos curvas diferenciables cerradas.



Estos dominios no son simplemente conexos, sino de forma de anillo y las dos curvas forman la frontera común pero ellas son opuestas. Usamos la fórmula de Gauss-Bonnet generalizada se tiene:

$$\iint_{D_1} K\,dA + \int_{\partial D_1} \kappa_g\,ds = 0, \qquad \iint_{D_2} K\,dA + \int_{\partial D_2} \kappa_g\,ds = 0,$$

y, puesto que $\int_{\partial D_1} \kappa_g \, ds = -\int_{\partial D_2} \kappa_g \, ds$, para el toro completo $\mathbb{T}$ se tiene

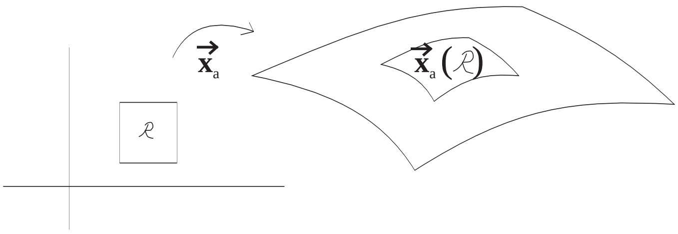
$$\iint_{\mathbb{T}} K \, dA = 0.$$

Así la curvatura integral del toro es nula, y lo mismo ocurre con cualquier superficie homeomorfa al toro.

15.4 La característica de Euler-Poincaré

Dedicamos lo que queda de esta lección a estudiar ciertas aplicaciones de la fórmula de Gauss-Bonnet. La idea fundamental es extenderla a regiones más generales; en particular, a superficies geométricas enteras. Para ello conviene que veamos algunas propiedades básicas de las superficies en las que no interviene la geometría.

Definición 15.19 *Una* descomposición rectangular $\mathcal{P}$ *de una superficie* $\mathcal{M}$ *es una colección finita de placas (u hojas) simples y regulares e inyectivas* $\{\vec{\mathbf{x}}_a\}_{a\in A}$ *cuyas imágenes cubren a* $\mathcal{M}$ *de tal manera que si dos de ellas se intersecan, solamente tienen común, o bien un vértice o bien una arista.*



A la imagen de los vértices de $\mathcal{R}$ mediante $\vec{\mathbf{x}}_a$ se les llama vértices de la placa. Y a la imagen de los lados de $\mathcal{R}$ se les denomina arista de la placa.

Proposición 15.20 *Toda superficie compacta* $\mathcal{M}$ *tiene una descomposición rectangular.*

Para la demostración ver [12]. □

Proposición 15.21 *Si* $\mathcal{P}$ *es una descomposición rectangular de una superficie compacta* $\mathcal{M}$ *, sea* v, a, c *el número de vértices, aristas y caras (placas) respectivamente. Entonces el número* $\chi(\mathcal{M}) = v - a + c$ *es independiente de la descomposición rectangular.*

Definición 15.22 $\chi(\mathcal{M})$ *se denomina* característica de Euler-Poincaré *de* $\mathcal{M}$ *.*

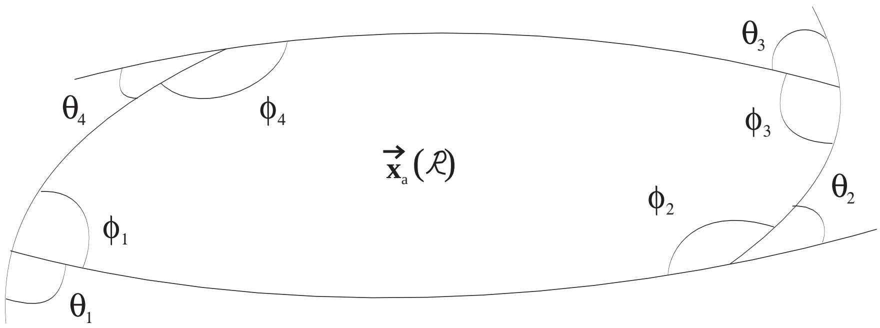
En vez de demostrar esta proposición estableceremos el siguiente resultado:
"Si $\mathcal{M}$ *es una superficie compacta y orientable de clase* C^3*, entonces la curvatura integral de* $\mathcal{M}$ *es* $2\pi\chi(\mathcal{M})$*."*

Fijemos una orientación en $\mathcal{M}$ y sea $\mathcal{P}$ una descomposición rectangular de $\mathcal{M}$ cuyas placas, imágenes de las cartas locales $\{\vec{\mathbf{x}}_a\}_{a\in A}$ están todas orientadas positivamente y cuyas fronteras tienen la orientación inducida por la de la superficie. Entonces

$$\iint\limits_{\mathcal{M}} K\,dA = \sum_{a\in A} \iint\limits_{\vec{\mathbf{x}}_a(\mathcal{R}_a)} K\,dA.$$

Aplicamos a cada sumando la fórmula de Gauss-Bonnet.

$$\iint\limits_{\vec{\mathbf{x}}_a(\mathcal{R}_a)} K\,dA = -\int\limits_{\partial\vec{\mathbf{x}}_a(\mathcal{R}_a)} \kappa_g ds - 2\pi + (\phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4).$$



Para sustituir en la expresión anterior hay que tener presente que

$$\sum_{a\in A} \int\limits_{\partial\vec{\mathbf{x}}_a(\mathcal{R}_a)} \kappa_g\,ds = 0,$$

pues las integrales sobre las arístas se cancelan por pares al tener orientación opuesta, al considerarlas en las distintas placas que la tienen común. Al sustituir resulta:

$$\iint\limits_{\mathcal{M}} K\,dA = -2\pi c + \nu,$$

siendo c el número de placas o caras; ν la suma de todos los ángulos interiores de todas las caras de la descomposición. Pero la suma de los ángulos interiores de cada vértice es precisamente 2π, de donde $\nu = 2\pi v$ (v es el número de vértices de la descomposición $\mathcal{P}$). Por tanto

$$\iint\limits_{\mathcal{M}} K\,dA = -2\pi c + 2\pi v.$$

Ahora bien, las caras de la descomposición $\mathcal{P}$ son rectangulares: cada cara tiene cuatro aristas. El número de aristas será $4c$, pero como se cuenta cada arista dos veces, resulta $4c = 2a$, es decir $-c = c - a$; por lo que

$$\iint\limits_{\mathcal{M}} K\,dA = 2\pi(v - a + c) = 2\pi\chi(\mathcal{M}).$$

□

Nota 15.23 Observenos que puesto que $\iint_{\mathcal{M}} K\, dA$ no depende de la descomposición particular de la superficie, se obtiene así la independencia de la característica de Euler-Poincaré respecto a la descomposición de la superficie en el caso de superficies de clase C^3.

Ejemplo 15.24

1. $\chi(S^2) = 2$ Esfera unidad.
2. $\chi(\mathbb{T}) = 0$ Toro.
3. $\chi(\mathbb{T}') = -2$ Toro con dos agujeros.

Definición 15.25 *El número* $(1 - \chi(\mathcal{M})/2)$ *se denomina* género *de la superficie.*

El género de las esferas es 0, el del toro es 1, el del toro con dos agujeros es 2, el del toro de tres agujeros es 3, etc...

APÉNDICE

Nociones de algebra lineal y análisis

A.1 Estructuras en $I\!R^n$

El conjunto $I\!R^n = \left\{ \ x = (x^1, \ldots, x^n)/x^i \in I\!R \quad i = 1, \ldots, n \right\}$ es un espacio topológico con la topología producto de la recta real por sí misma n veces.

$I\!R^n$ se convierte en un espacio métrico, introduciendo una métrica dada por la función distancia:

$$d : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R \qquad (x, y) \mapsto d(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \cdots + (x^n - y^n)^2}$$

d verifica:

1) $d(x, x) = 0.$

2) $x \neq y \Rightarrow d(x, y) = d(y, x) > 0.$

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

Considerado $I\!R^n$ como espacio métrico se denomina espacio euclídeo n–dimensional.

Notemos que la topología inducida en $I\!R^n$ por la función distancia es equivalente a la topología producto.

El conjunto $I\!R^n$ tiene una estructura de espacio vectorial canónica, con las siguientes operaciones

$$\vec{x} + \vec{y} = (x^1, \ldots, x^n) + (y^1, \ldots, y^n) = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n),$$

$$\lambda\vec{x} = \lambda(x^1, \ldots, x^n) = (\lambda x^1, \ldots, \lambda x^n).$$

En el espacio vectorial $I\!R^n$, definimos la siguiente aplicación:

$$g : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R, \qquad (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto g(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i.$$

que se denomina producto escalar o interior, y tiene las siguientes propiedades:

1) Bilineal:

2) Simétrica: $g(\vec{x},\vec{y}) = g(\vec{y},\vec{x})$; $\quad(\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x})$

3) Definida positiva: $g(\vec{x},\vec{x}) \geq 0$ y $g(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ ($\vec{x}\cdot\vec{x} \geq 0$ y $\vec{x}\cdot\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$).

Se define la **norma** de un vector en $I\!R^n$ como :

$$\|\vec{x}\| = +\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}.$$

Existe la siguiente relación entre la norma y la función distancia d:
Si x e y son dos puntos con vectores posición $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

$$d(x,y) = \|\vec{x}-\vec{y}\|.$$

La base ortonormal canónica en $I\!R^n$ será denotada por $\{\vec{e_1},\ldots,\vec{e_n}\}$, verificándose

$$\vec{e_i}\cdot\vec{e_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

El espacio vectorial $I\!R^n$, con la topología producto es un espacio vectorial topológico; es decir, las operaciones son continuas.

A.2 Aplicaciones diferenciables

Definición A.1 *Una función $f : U \subset I\!R^n \to I\!R$, definida en un conjunto abierto $U \subset I\!R^n$, se dice que es* diferenciable *sobre U si f tiene derivadas parciales (continuas) de todos los órdenes con respecto a cada una de las variables en todo punto de U.*

El conjunto de las funciones diferenciables sobre un abierto $U \subset I\!R^n$ es un anillo respecto a la suma y multiplicación de funciones punto a punto. Lo denotaremos por $\mathcal{F}(U)$.

Definición A.2 *Sea U un subconjunto abierto de $I\!R^n$. $F : U \subset I\!R^n \to I\!R^n$ es una aplicación* diferenciable *si sus funciones componentes* [(1)], *$F^j = y^j \circ F \quad (j = 1,\ldots,n)$ son diferenciables sobre U.*

(1) $y^j : I\!R^n \to I\!R \quad y^j(y^1,\ldots,y^n) = y^j$ son las funciones coordenadas.

A.3 Espacio de vectores tangentes en un punto de $I\!R^n$

Definición A.3 *Un* vector tangente a $I\!R^n$ en a, *que es denotado por $\vec{v}_a$, consiste en un par $(a, v) \in I\!R^n \times I\!R^n$, que representan su parte vectorial v y su punto de aplicación a.*

Definición A.4 *Se denomina* espacio tangente *a $I\!R^n$ en a al conjunto de los vectores tangentes en a. Se denota por $T_a(I\!R^n)$.*

Existe una biyección canónica

$$\phi_a : T_a(I\!R^n) \to I\!R^n \qquad \vec{v}_a \mapsto (v^1, \dots, v^n).$$

Esta biyección permite definir en $T_a(I\!R^n)$ una estructura de espacio vectorial tal que ϕ_a se convierta en un isomorfismo.

La base canónica $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ en $I\!R^n$ y el isomorfismo ϕ_a permiten definir una base natural o canónica en $T_a(I\!R^n)$ por:

$$E_i = \phi_a^{-1}(\vec{e}_i) \qquad (i = 1, \dots, n).$$

La traslación en $I\!R^n$ da lugar a un isomorfismo entre $T_a(I\!R^n)$ y $T_b(I\!R^n)$

$$T_a(I\!R^n) \stackrel{\phi_b^{-1} \circ \phi_a}{\longrightarrow} T_b(I\!R^n).$$

A.4 Derivadas direccionales

Sean $a \in I\!R^n$, $\vec{v}_a = \sum_{i=1}^{n} v^i E_{i_a} \in T_a(I\!R^n)$, $\mathcal{F}(a)$ el conjunto de las funciones diferenciables en a, y $f \in \mathcal{F}(a)$.

Definición A.5 *Se define la* derivada direccional *de f en a en la dirección de $\vec{v}_a$ por*

$$\vec{v}_a(f) \equiv D_{\vec{v}_a}(f) = \frac{d}{dt} f(a + tv)_{|t=0} = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}_{|a}.$$

Tenemos así definida, para cada $\vec{v}_a$, una aplicación

$$D_{\vec{v}_a} : \mathcal{F}(a) \to I\!R.$$

Que podemos denotar por

$$\sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv D_{\vec{v}_a}.$$

En particular, si $\vec{v}_a = E_{i_a}$,

$$D_{E_{i_a}} \equiv \partial/\partial x^i.$$

Notemos que $D_{\vec{v}_a}(x^i) = v^i$, por lo que el vector $\vec{v}_a$ está completamente determinado si se conoce las derivadas direccionales sobre toda función diferenciable en a.

Propiedades de la derivada direccional:

$$D_{\vec{v}_a}(\lambda f + \mu h) = \lambda D_{\vec{v}_a}(f) + \mu D_{\vec{v}_a}(h)$$

$$D_{\vec{v}_a}(fh) = h(a) D_{\vec{v}_a}(f) + f(a) D_{\vec{v}_a}(h)$$

siendo $\lambda, \mu \in I\!R$ y $f, h \in \mathcal{F}(a)$.

Si denotamos por $\mathcal{D}(a)$ el conjunto de las aplicaciones de $\mathcal{F}(a)$ en $I\!R$, verificando las propiedades anteriores, se ve claramente que es un espacio vectorial. A sus elementos se les denomina derivaciones.

Se tiene el siguiente resultado [2] [9]:

"Existe un isomorfismo entre los vectores tangentes a $I\!R^n$ en a y el conjunto de las derivaciones de $\mathcal{D}(a)$"

A.5 Campos de vectores en $I\!R^n$

Definición A.6 *Un* campo de vectores *en $I\!R^n$ es una aplicación*

$$X : p \mapsto X_p \in T_p(I\!R^n).$$

Base canónica de campos de vectores en $I\!R^n$

$$\{E_1, \ldots, E_n\} \quad \text{donde } E_{i_p} = \phi_p^{-1}(e_i).$$

Todo campo de vectores en $I\!R^n$ se expresa por

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i E_i \quad \text{donde } X^i : I\!R^n \to I\!R.$$

Definición A.7 *Un campo de vectores X en $I\!R^n$ se dice que es* diferenciable *si las funciones componentes X^i son diferenciables.*

Al conjunto de campos de vectores diferenciables sobre $I\!R^n$ lo denotamos por $\mathfrak{X}(I\!R^n)$.

La derivada direccional de una función $f \in \mathcal{F}(I\!R^n)$ respecto a un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(I\!R^n)$, se define como la función

$$X(f) : I\!R^n \to I\!R$$

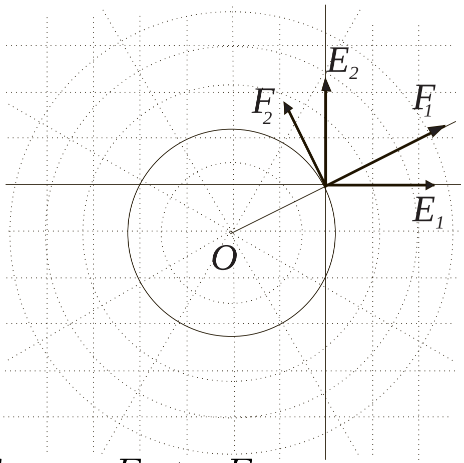
$$a \in I\!R^n \mapsto X_a(f) = D_{X_a}(f) = \frac{d}{dt} f(a + tX_a)_{|t=0} = \sum_{i=1}^{n} X_a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}_{|a}.$$

Cambio de coordenadas en $I\!R^n$ y base de campos de vectores asociada:
Sean $(x^1, \ldots, x^n)$ y $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ las coordenadas de un punto de $I\!R^n$ relativas a sendos sistemas de coordenadas, supongamos que ambas se relacionan mediante las ecuaciones:

$$\bar{x}^i = F^i(x^1, \ldots, x^n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

entonces los correspondientes campos de vectores básicos asociados a ambos sistemas de coordenadas se relacionan mediante:

$$\bar{E}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} E_j.$$



Ejemplo A.8 Si $\{E_1, E_2\}$ es la base de campos de vectores en $I\!R^2$ asociada a las coordenadas cartesianas (x, y) y $\{F_1, F_2\}$ la base de campos de vectores asociada a las coordenadas polares (ρ, θ) en $I\!R^2 - \{(0,0)\}$, se tienen las siguientes relaciones, si $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \operatorname{sen}\theta$:

$$F_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} E_1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} E_2, \qquad F_2 = -yE_1 + xE_2.$$

A.6 Aplicaciones inducidas

Definición A.9 $F : I\!R^n \to I\!R^m$ *es una aplicación diferenciable, a la aplicación:*

$$F_* : T_a(I\!R^n) \to T_{F(a)}(I\!R^m)$$

$$F_*(\vec{v}_a) = \frac{d}{dt} F(a + tv)_{|t=0}$$

se denomina aplicación inducida *entre los espacios tangentes.*

Si $\{E_1, \ldots, E_n\}$ y $\{E_1, \ldots, E_m\}$ son las bases canónicas de campos de vectores en $I\!R^n$ y $I\!R^m$, respectivamente y $(F^1, \ldots, F^m)$ son las componentes de F, se tiene las siguientes propiedades:

$$F_*(\vec{v}_a) = (\vec{v}_a(F^1), \ldots, \vec{v}_a(F^m)) \in T_{F(a)}(I\!R^n).$$

$$F_*(E_{ia}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(a) E_{j\,F(a)}.$$

F_* es lineal.

En particular, si $m = 1$, y $f : I\!R^n \to I\!R$ es una función diferenciable:

$$f_* : T_a(I\!R^n) \to T_{f(a)}(I\!R) \qquad \vec{v}_a \mapsto f_*(\vec{v}_a) = \vec{v}_a(f) E_{f(a)}.$$

Definición A.10 *A la aplicación*

$$df : T_a(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \quad \vec{v}_a \mapsto df(\vec{v}_a) = \vec{v}_a(f)$$

se le denomina diferencial *de f.*

La diferencial $df \in T_a^*(\mathbb{R}^n)$. En particular, si $x^1, \dots, x^n$ son las funciones coordenadas (proyeciones i-ésimas), $dx^i \in T_a^*(\mathbb{R}^n)$.

$\{dx^1, \dots, dx^n\}$ es una base de $T_a^*(\mathbb{R}^n)$ dual de la base $\{E_1, \dots, E_n\}$ de $T_a(\mathbb{R}^n)$, y para toda función diferenciable:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

A.7 Derivada covariante en $\mathbb{R}^n$

Un campo de vectores en $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, se puede interpretar como una aplicación diferenciable que a cada punto P de coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ le asigna el vector X_P de componentes $(X^1, \dots, X^n)$ respecto a la base canónica en $\mathbb{R}^n$.

Definición A.11 *Se denomina* derivada covariante *de un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ en la dirección de $\vec{v} \in T_a(\mathbb{R}^n)$ al vector en el punto a, dado por*

$$D_{\vec{v}_a} X = \frac{d}{dt} X(a + tv)_{|t=0}.$$

Así, si $X = \sum_{i=1}^{n} X^i E_i$

$$D_{\vec{v}_a} X = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_a(X^i) E_{i\,a}.$$

Proposición A.12 *La derivada covariante tiene las siguientes propiedades:*

$$\begin{aligned}
D_{\vec{v}_a + \vec{w}_a} X &= D_{\vec{v}_a} X + D_{\vec{w}_a} X \\
D_{\lambda \vec{v}_a} X &= \lambda D_{\vec{v}_a} X \\
D_{\vec{v}_a}(X + Y) &= D_{\vec{v}_a} X + D_{\vec{v}_a} Y \\
D_{\vec{v}_a} \lambda X &= \lambda D_{\vec{v}_a} X \\
D_{\vec{v}_a}(fX) &= \vec{v}_a(f) X_a + f(a) D_{\vec{v}_a} X \\
\vec{v}_a(X \cdot Y) &= (D_{\vec{v}_a} X) \cdot Y_a + X_a \cdot (D_{\vec{v}_a} Y)
\end{aligned}$$

para todo $\vec{v}_a, \vec{w}_a \in T_a(\mathbb{R}^n)$; $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$; $\lambda \in \mathbb{R}$; $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. □

Definición A.13 *Se denomina* derivada covariante *de un campo de vectores* $Y \in \mathfrak{X}(I\!R^n)$ *en la dirección del campo* $X \in \mathfrak{X}(I\!R^n)$ *al campo de vectores, cuyo representante en el punto a, viene dado por*

$$(D_X Y)(a) = D_{X_a} Y.$$

Es decir, si $Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i E_{ia}$

$$(D_X Y)(a) = \sum_{i=1}^{n} X_a(Y^i) E_i(a).$$

A.8 Identidades vectoriales en $I\!R^3$

Definición A.14 *Se define el* producto mixto *de tres vectores* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *como el escalar:*

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Propiedades:

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = [\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}] = [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}] = -[\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}] = -[\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}] = -[\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}].$$

Expresión del producto mixto en forma de determinante:

$$\vec{a} = (a^1, a^2, a^3), \quad \vec{b} = (b^1, b^2, b^3), \quad \vec{c} = (c^1, c^2, c^3)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(\begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} \right) (c^1, c^2, c^3) =$$

$$= c^1 \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} - c^2 \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix} + c^3 \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

De esta expresión se obtiene con facilidad las propiedades enunciadas.

Producto triple

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

Igualdad que se comprueba inmediatamente si se toma un sistema ortonormal $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ tal que sea

$$\vec{a} = a\vec{u}_1, \qquad \vec{b} = b^1\vec{u}_1 + b^2\vec{u}_2, \qquad \vec{c} = c^1\vec{u}_1 + c^2\vec{u}_2 + c^3\vec{u}_3.$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = ab^2\vec{u}_3\times(c^1\vec{u}_1+c^2\vec{u}_2+c^3\vec{u}_3) =$$

$$= ab^2c^1\vec{u}_2 - ab^2c^2\vec{u}_1 = ab^2c^1\vec{u}_2 + ab^1c^1\vec{u}_1 - ab^1c^1\vec{u}_1 + ab^2c^2\vec{u}_1 =$$

$$= ac^1(b^1\vec{u}_1+b^2\vec{u}_2) - (b^1c^1+b^2c^2)a\vec{u}_1 = ac^1\vec{b} - (b^1c^1+b^2c^2)\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.$$

Identidad de Lagrange

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix} = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d}).$$

Fórmula que resulta de la propiedad de producto mixto y de la expresión del producto triple:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}\times\vec{d}] = [\vec{b}\ \ \vec{c}\times\vec{d}\ \ \vec{a}] =$$

$$= \left(\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})\right)\cdot\vec{a} = \left((\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}\right)\cdot\vec{a} = (\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{c}\cdot\vec{a}) - (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{d}\cdot\vec{a}).$$

A.9 Tensores sobre un espacio vectorial

Sea E un espacio vectorial real de dimensión n.

Definición A.15 *Un* tensor *K de tipo (r,s) sobre E es una aplicación multilineal (lineal respecto a cada argumento)*

$$K : E\times \overset{s)}{\cdots} \times E \times E^*\times \overset{r)}{\cdots} \times E^* \to \mathbb{R}$$

donde E^* es el espacio vectorial dual de E; r es el orden contravariante y s el orden covariante.

Como casos particulares, tenemos:

1. $r=0, s=1$: un $\theta\in E^*$ (una aplicación lineal $\theta\colon E\to\mathbb{R}$)
2. $r=0, s=2$: una aplicación bilineal $\phi : E\times E\to\mathbb{R}$.
3. $r=1, s=0$. Como E y $(E^*)^*$ son naturalmente isomorfos, podemos identificar $v\in E$ con una aplicación lineal de E^* en $\mathbb{R}$, esto es, un vector de E es un tensor de tipo (1,0).

Denotaremos por $\bigotimes_s^r E$ el conjunto de todos los tensores de tipo (r,s) sobre E, el cual es un espacio vectorial respecto de la suma de aplicaciones y el producto de aplicaciones por un escalar, definidos por:

$$(\lambda K + \mu L)(v_1, \ldots, v_r, \theta^1, \ldots, \theta^s) =$$

$$= \lambda K(v_1, \ldots, v_r, \theta^1, \ldots, \theta^s) + \mu L(v_1, \ldots, v_r, \theta^1, \ldots, \theta^s)$$

$$\forall K, L \in \bigotimes_s^r E; \quad \forall \lambda, \mu \in I\!R; \quad \forall v_1, \ldots, v_r \in E; \quad \forall \theta^1, \ldots, \theta^s \in E^*$$

Proposición A.16 *$\bigotimes_s^r E$ tiene dimensión n^{r+s}*

Restringiremos la demostración a tensores covariantes, es decir, de tipo $(0,p)$, ya que estos serán los que usaremos con más frecuencia. Y dejamos el caso más general para el ingenio del lector.

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de E, entonces $\phi \in \bigotimes_p^0 E$ está completamente determinado por sus n^p valores sobre los vectores básicos, dado la linealidad respecto a cada argumento.

A las n^p escalares $\phi_{i_1 \cdots i_p} = \phi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ se denominan componentes del tensor ϕ respecto a la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Definimos los elementos $\Omega^{i_1 \cdots i_p}$ de $\bigotimes_p^0 E$ $(i_1, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots n)$ por sus valores sobre los vectores básicos como sigue:

$$\Omega^{i_1 \cdots i_p}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = \begin{cases} 1 \text{ si } & i_k = j_k \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots, p \\ 0 \text{ si } & i_k \neq j_k \quad \text{para algún} \quad k \end{cases}$$

y extendemos la definición sobre una $p-$upla $(v_1, \ldots, v_p)$ por linealidad.

Estos n^p tensores son linealmente independientes. En efecto:

$$\sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} \lambda_{i_1 \cdots i_p} \Omega^{i_1 \cdots i_p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} \lambda_{i_1 \cdots i_p} \Omega^{i_1 \cdots i_p}(v_1, \ldots, v_p) = 0, \ \forall v_k \in E$$

Si tomamos $v_1 = e_{i_1}, \ldots, v_p = e_{i_p}$, resulta $\lambda_{i_1 \cdots i_p} = 0$.

Además, todo $\phi \in \bigotimes_p^0 E$ se puede poner en combinación lineal de los tensores

$$\{\Omega^{i_1 \cdots i_p}\}_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n}$$

En efecto:

$$\text{Si} \quad \phi_{i_1 \cdots i_p} = \phi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}), \quad \text{entonces} \quad \phi = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} \phi_{i_1, \ldots, i_p} \Omega^{i_1 \cdots i_p}$$

Podemos afirmar, entonces que

$$\{\Omega^{i_1 \cdots i_p}\}_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n}$$

es una base de $\bigotimes_p^0 E$, y por tanto dim $\bigotimes_p^0 E = n^p$. □

Cambio de base

Por un cambio de base de E las componentes de un tensor están sujetas a las siguientes transformaciones. Sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ dos bases de E y si (A_i^j) es la matriz cambio de base, es decir

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} A_i^j \bar{e}_j \quad (i = 1, \dots, n).$$

Las componentes de un tensor $\phi \in \bigotimes_p^0 E$, respecto a ambas bases se relacionan :

$$\bar{\phi}_{i_1 i_2 \cdots i_p} = \sum_{1 \leq j_1 \cdots j_p \leq n} B_{i_1}^{j_1} B_{i_2}^{j_2} \cdots B_{i_p}^{j_p} \phi_{j_1 j_2 \cdots j_p}.$$

donde $B = (B_j^i)$ es la matriz inversa de la matriz $A = (A_j^i)$, esto es

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^i B_k^j = \delta_k^i.$$

Sean $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ y $\{\bar{\omega}^1, \dots, \bar{\omega}^n\}$ las bases duales respectivas, relacionadas por

$$\omega^i = \sum_{j=1}^{n} B_j^i \bar{\omega}^j \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Un tensor contravariante $\psi \in \bigotimes_0^p E$ tiene por componentes:

$$\psi^{i_1 \cdots i_p} = \psi(\omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_p}); \qquad \bar{\psi}^{1_1 \cdots i_p} = \psi(\bar{\omega}^{i_1}, \dots, \bar{\omega}^{i_p}).$$

Las cuales se relacionan por la transformación:

$$\bar{\psi}^{i_1 i_2 \cdots i_p} = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_p \leq n} A_{j_1}^{i_1} A_{j_2}^{i_2} \cdots A_{j_p}^{i_p} \psi^{j_1 j_2 \cdots j_p}.$$

En general, las componentes de un tensor K de tipo (r, s) respecto de dos bases se relacionan mediante la siguiente ley (criterio de tensorialidad):

$$\bar{K}_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} = \sum_{\substack{1 \leq h_1, \dots, h_s \leq n \\ 1 \leq k_1, \dots, k_r \leq n}} A_{k_1}^{i_1} \cdots A_{k_r}^{i_r} B_{j_1}^{h_1} \cdots B_{j_r}^{h_s} K_{h_1 \cdots h_s}^{k_1 \cdots k_r} \tag{A9.1}$$

Multiplicación de tensores covariantes

Definición A.17 *Sean* $\phi \in \bigotimes_p^0 E$ *y* $\psi \in \bigotimes_q^0 E$*, definimos el* producto tensorial *de* ϕ *y* ψ *al tensor* $\phi \otimes \psi \in \bigotimes_{p+q}^0 E$ *dado por*

$$(\phi \otimes \psi)(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}) = \phi(v_1, \ldots, v_p)\psi(v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}).$$

Propiedades

1. La aplicación $(\phi, \psi) \in \bigotimes_p^0 E \times \bigotimes_q^0 E \mapsto \phi \otimes \psi \in \bigotimes_{p+q}^0 E$ es bilineal y asociativa.

2. Si $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ es una base de $E^* = \bigotimes_1^0 E$, entonces

$$\left\{\omega^{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{i_p}\right\}_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} \quad \text{es una base de} \quad \bigotimes_p^0 E.$$

   (Para ver esto, sólo basta tomar $\{e_1, \ldots, e_n\}$ como base dual de $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$, y comprobar que los tensores $\Omega^{i_1 \cdots i_p}$, definidos anteriormente coinciden con los $\omega^{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{i_p}$).

3. Si $\phi \in \bigotimes_p^0 E$ de componentes $\phi_{i_1 \cdots i_p}$ y $\psi \in \bigotimes_p^0 E$ de componentes $\psi_{j_1 \cdots j_q}$, entonces las componentes de $\Theta = \phi \otimes \psi \in \bigotimes_{p+q}^0 E$ son:

$$\Theta_{i_1 \cdots i_{p+q}} = \phi_{i_1 \cdots i_p} \psi_{i_{p+1} \cdots i_{p+q}}.$$

Tensores covariantes simétricos y antisimétricos

Definición A.18 *Se dice* $\phi \in \bigotimes_p^0 E$ *es* simétrico *si para cada* $1 \leq i, j \leq n$*, se tiene:*

$$\phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_p) = \phi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_p).$$

Definición A.19 *Se dice* $\phi \in \bigotimes_p^0 E$ *es* antisimétrico *si para cada* $1 \leq i, j \leq n$*, se tiene:*

$$\phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_p) = -\phi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_p).$$

Los conjuntos

$$\Lambda^p(E) = \left\{\phi \in \bigotimes_p^0 E / \ \phi \ \text{ es antisimétrico } \right\}$$

$$\Sigma^p(E) = \left\{\phi \in \bigotimes_p^0 E / \ \phi \ \text{ es simétrico } \right\}$$

son subespacios vectoriales de $\bigotimes_p^0 E$.

Definición A.20 *Se denominan operadores* simetrización *y* antisimetrización *a las aplicaciones lineales* $\mathcal{S} : \bigotimes_p^0 E \to \bigotimes_p^0 E$ *y* $\mathcal{A} : \bigotimes_p^0 E \to \bigotimes_p^0 E$*, definidas, respectivamente por:*

$$(\mathcal{S}\phi)(v_1, \dots, v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)})$$

$$(\mathcal{A}\phi)(v_1, \dots, v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \epsilon_\sigma \phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)})$$

donde $\mathfrak{S}_p$ *es el grupo de las permutaciones de* p *elementos y* ϵ_σ *igual a +1 o -1 según que la paridad de la permutación* σ *sea par o impar.*

Propiedades de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$

1. $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ y $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}$.
2. $\mathcal{A}(\bigotimes_p^0 E) = \Lambda^p(E)$ y $\mathcal{S}(\bigotimes_p^0 E) = \Sigma^p(E)$.
3. $\phi \in \bigotimes_p^0 E$ es antisimétrico si y sólo si $\mathcal{A}\phi = \phi$.

   $\phi \in \bigotimes_p^0$ es simétrico si y sólo si $\mathcal{S}\phi = \phi$.

Producto simétrico y exterior

Si $\phi \in \bigotimes_p^0 E$ y $\psi \in \bigotimes_q^0 E$ son simétricos, el producto tensorial $\phi \otimes \psi \in \bigotimes_{p+q}^0 E$ no tiene porqué ser simétrico. Definimos el producto simétrico por

$$\Sigma^p(E) \times \Sigma^q(E) \to \Sigma^{p+q}(E); \qquad (\phi, \psi) \mapsto \phi \odot \psi = \mathcal{S}(\phi \otimes \psi).$$

En particular, si $\theta, \omega \in \bigotimes_1^0 E$, entonces $\theta \odot \omega = 1/2(\theta \otimes \omega + \omega \otimes \theta)$

$$\theta \odot \omega(u, v) = \frac{1}{2}(\theta(u)\omega(v) + \omega(u)\theta(v)) \quad \forall u, v \in E.$$

Si $\phi \in \bigotimes_p^0 E$ y $\psi \in \bigotimes_q^0 E$ son antisimétricos, el producto tensorial $\phi \otimes \psi \in \bigotimes_{p+q}^0 E$ no tiene porqué ser antisimétrico. Definimos el producto exterior por

$$\Lambda^p(E) \times \Lambda^q(E) \to \Lambda^{p+q}(E); \qquad (\phi, \psi) \mapsto \phi \wedge \psi = \mathcal{A}(\phi \otimes \psi).$$

En particular, si $\theta, \omega \in \bigotimes_1^0 E$, entonces $\theta \wedge \omega = 1/2(\theta \otimes \omega - \omega \otimes \theta)$

$$\theta \wedge \omega(u, v) = \frac{1}{2}(\theta(u)\omega(v) - \omega(u)\theta(v)) \quad \forall u, v \in E.$$

E J E R C I C I O S

1. Sea $\vec{v}_p$ el vector tangente a $I\!R^3$ para el cual $\vec{v}_p = (1,2,2)$ y $p = (2,-1,1)$. Calcular la derivada direccional $\vec{v}_p(f)$, donde $f(x^1,x^2,x^3) = x^1(x^2)^2 + x^2(x^3)^2$.
2. Sea $X = x^3E_1 - x^1E_2 + x^2E_3$ y f,g funciones en $I\!R^3$ definidas por
$$f((x^1,x^2,x^3)) = x^1x^3, \quad g((x^1,x^2,x^3)) = (x^2)^3.$$
Calcular $X(f), X(fg), X(X(f))$.
3. Si $v(f) = w(f)$, $\forall f \in \mathcal{F}(I\!R^n)$, función diferenciable sobre $I\!R^3$, demostrar que $v = w$.
4. Encontrar F_* para la aplicación $F : I\!R^3 \to I\!R^3$, $F(x,y,z) = (x, y\cos z, y \,\mathrm{sen}\, z)$. Calcular $F_*(\vec{v}_p)$ si: a) $\vec{v}_p = (3,-2,1)$ y $p = (0,0,0)$, b) $\vec{v}_p = (3,-2,1)$ y $p = (4,\pi,\pi/2)$.
5. Probar que una aplicación diferenciable $F : I\!R^n \to I\!R^m$ conserva la derivada direccional en el sentido siguiente: Si $\vec{v}_p \in T_p(I\!R^n)$ y g es una función diferenciable sobre $I\!R^m$, entonces $F_*(\vec{v}_p)(g) = \vec{v}_p(g \circ F)$.
6. Sea $\vec{v}_p = (3,2,-1)$ y $p = (0,-5,2)$. Evaluar las siguientes 1–formas sobre el vector tangente $\vec{v}_p$: (a) z^2dy; (b) $ydx - xdy$; (c) $ydx + (1-z^2)dy - x^2dz$.
7. Evaluar la 1–forma $\alpha = yz\,dx - xz\,dy$ sobre los campos de vectores:
$$\text{(a) } X = yE_1 + zE_2 + xE_3, \text{(b) } Y = y(E_1 - E_3) + z(E_1 - E_2),$$
$$\text{(c) } (1/x)X + (1/y)Y.$$
8. En cada uno de los siguientes casos calcular la diferencial de f y encontrar la derivada direccional $\vec{v}_p(f)$ para $\vec{v}_p = (3,2,-1)$ y $p = (1,5,2)$:
$f(x,y,z) = xz - yz$; $\quad f(x,y,z) = ye^{xz}$; $\quad f(x,y,z) = \mathrm{sen}(xy) + \cos(xz)$.
9. En cada caso ϕ es una aplicación sobre vectores tangentes tal que el valor de ϕ sobre $\vec{v}_p = (v^1,v^2,v^3)_p$ para $p = (p^1,p^2,p^3)$ es:
(a) $v^1 - v^3$, (b) $p^1 - p^3$, (c) $v^1p^3 - v^2p^1$, (d) $\vec{v}_p(x^2+y^2)$, (e) 0.
¿Cuál de las ϕ es 1–forma? En caso de que ϕ sea una 1–forma expresarla como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i dx^i$?

10. Se consideran en $I\!R^3$ los siguientes campos de vectores:

$$X_1 = (2+y^2)e^z E_1,$$
$$X_2 = 2xyE_1 + (2+y^2)E_2,$$
$$X_3 = -2xy^2E_1 + y(2+y^2)E_2 + (2+y^2)E_3.$$

(a) ¿Constituyen X_1, X_2, X_3 una base de campos de vectores diferenciables en $I\!R^3$?

(b) Determinar las 1–formas $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ duales de X_1, X_2, X_3, en función de dx, dy, dz.

11. Sean $F : I\!R^2 \to I\!R^2$, $G : I\!R^2 \to I\!R^3$ definidas por:

$$F((x,y)) = (x^2 - 2y, 4x^3y^2), \qquad G((x,y)) = (x^2y + y^2, x - y^3, ye^x)$$

Calcular F_* en $(1,2)$ y de G_* en todo (a,b). Encontrar $G_*(4E_1 - E_2)$.

12. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(I\!R^n)$ (campos de vectores diferenciables sobre $I\!R^n$), definimos un nuevo campo de vectores, corchete de X e Y, por la fórmula:

$$[X,Y] : p \in I\!R^n \to [X,Y]_p \in T_p(I\!R^n)$$

$$[X,Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)), \ \ \forall f \in \mathcal{F}(I\!R^n)$$

Verificar que las componentes de $[X,Y]$ respecto a la referencia natural de campos de vectores $\{E_1, ..., E_n\}$ son

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^{n} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) E_j, \text{ si } X = \sum_{i=1}^{n} X^i E_i, \ Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i E_i.$$

13. Respecto a las coordenadas canónicas de $I\!R^3$, se consideran los campos de vectores

$$X = x^2E_3 - x^3E_2, \quad Y = x^3E_1 - x^1E_3, \quad Z = x^1E_2 - x^2E_1,$$

verificar que X, Y, Z son dependientes en $I\!R^3$, y comprobar que

$$[X,Y] = -Z, \quad [Y,Z] = -X, \quad [Z,X] = -Y.$$

14. En $I\!R^2$, calcular el corchete $[X,Y]$ de los campos de vectores $X = x^1x^2E_1$ e $Y = x^2E_2$.

Ejercicios de curvas

15. Encuéntrese una parametrización de las siguientes curvas en $I\!R^2$:
$(a)\ 2x + 3y = 5, \ \ (b)\ y = e^x, \ \ (c)\ 2x^2 + y = 1.$

16. Hallar una representación paramétrica de una curva cuyo conjunto imagen sea la circunferencia: $x^2 + y^2 = 1, \ z = 0$, recorrido en el sentido de las agujas del reloj y con punto inicial $(0,1,0)$.

17. Encontrar la curva $\vec{\alpha}$ tal que $\vec{\alpha}(0) = (2,3,0)$ y $\vec{\alpha}\,'(t) = (e^t, -2t, t)_{\vec{\alpha}(t)}$.
18. Encontrar la curva cuya derivada segunda $\vec{\alpha}\,''(t)$ sea idénticamente nula.
19. Una cicloide es una curva plana, trayectoria de un punto fijo en una circunferencia que rueda sobre una recta. Encontrar una representación paramétrica de la cicloide.
20. Sea la representación paramétrica de la hélice circular $\vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ $0 < t < \pi$. Encontrar un cambio de parámetro que nos dé, a partir de ésta, la representación:

$$\vec{\beta}(u) = (a\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2au}{1+u^2}, 2b \ \operatorname{arctg}\ u) \qquad 0 < u < \infty$$

Establecer que estas dos representaciones son equivalentes.
21. Hallar la longitud de arco de la curva:

$$x = 2a(1+\cos t) \quad y = 2a(1+\operatorname{sen} t) \quad z = a\sqrt{5}t$$

comprendido entre los puntos correspondientes a $t = 0$ y $t = 2\pi$.
22. Sea una curva plana dada en coordenadas polares por $\rho = \rho(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$. Hallar la longitud de arco de esta curva.
23. Encontrar la longitud de arco de una cicloide (ver Ejercicio 19), para $0 \leq t \leq 2\pi$. Encontrar la longitud entre los puntos correspondientes a los valores 0 y t del parámetro. Usando este último resultado dar la representación natural de la cicloide, y probar que los puntos donde la cicloide corta al eje OX son puntos singulares.
24. a) Probar que la curva $\vec{\alpha}(t) = (\operatorname{sen} 3t \cos t, \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} t, 0)$ es regular.

    b) Hallar la ecuación de la tangente a $\vec{\alpha}$ en $t = \pi/3$.
25. a) Decir cuáles de las curvas siguientes son regulares:

$$\begin{array}{rcl} i)\ \vec{\alpha}(t) & = & (\cos t, 1-\cos t - \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t) \\ ii)\ \vec{\beta}(t) & = & (2\operatorname{sen} 2t, 2\operatorname{sen} 2t \operatorname{tag} t, 0) \\ iii)\ \vec{\gamma}(t) & = & (\cos t, \cos 2t, \operatorname{sen} t) \end{array}$$

    b) Hallar la tangente a cada una de ellas en $t = \pi/4$.
26. Ecuación de la tangente a la curva $\vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt), a, b > 0$ en el punto $t = t_0$. Probar que el ángulo entre $\vec{u} = (0,0,1)$ y $\vec{\alpha}\,'(t)$ es constante.
27. $h :]-1,1[\to]-\infty,\infty[$, , $h(t) = \operatorname{tag}((\pi/2)t)$. ¿Define un cambio de parámetro?
28. ¿Define una reparametrización la siguiente aplicación?:
$$h :]0,\infty[\to]0,1[, \qquad h(t) = t^2/(t^2+1).$$
29. Consideremos la espiral logarítmica $\vec{\alpha}(t) = (e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t, 0)$. Probar que el ángulo entre $\vec{\alpha}(t)$ y $\vec{\alpha}\,'(t)$ es constante.
30. Sea $\vec{\alpha}(t)$ una curva regular. Supongamos que exista $\vec{a} \in I\!\!R^3$ tal que $\vec{\alpha}(t) - \vec{a}$ es ortogonal a $\vec{\alpha}'(t), \forall t$. Probar que dicha curva está contenida en una esfera.

31. Hallar la ecuación del plano osculador en un punto general de la curva dada por $\vec{\alpha}(t) = (t, t^2, t^3)$, y demostrar que los planos osculadores en tres puntos de la curva se intersectan en un punto que está en el plano determinado por estos tres puntos.
32. Demostrar que el plano normal a una curva situada sobre una esfera pasa por el centro de la misma.
33. Demostrar que una curva es una recta si todas sus tangentes pasan por un punto fijo.
34. Consideremos la curva intersección de los cilindros $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = b^2$. Determinar la tangente, el plano normal y el plano osculador en un punto genérico de la curva.
35. Demostrar que las fórmulas de Frenet pueden escribirse de la forma
$$\dot{\vec{t}} = \vec{v} \times \vec{t}, \qquad \dot{\vec{n}} = \vec{v} \times \vec{n}, \qquad \dot{\vec{b}} = \vec{v} \times \vec{b}.$$
Donde las derivadas son respecto al parámetro natural. Al vector $\vec{v}$ se le denomina vector de Darboux y es $\vec{v} = \tau\vec{t} + \kappa\vec{b}$.
36. Encontrar el plano normal a la curva $x^2 - y^2 + xyz^2 = 11$ $x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 30$ en el punto $(3, 2, 1)$.
37. Demostrar que la curvatura de una curva regular en un punto P es la curvatura en P de la curva plana que resulta de proyectar aquella sobre su plano osculador en el punto P.
38. Probar que cuando dos curvas son simétricas respecto al origen tienen igual curvatura y torsiones opuestas.
39. ¿Cuándo es posible una correspondencia biyectiva entre dos curvas tal que en los puntos correspondientes las rectas binormales coincidan?
40. Demostrar que si todas las normales a una curva pasan por un punto fijo es una circunferencia.
41. Una curva con curvatura no nula es plana si y sólo si su torsión es idénticamente nula.
42. Averiguar si la curva $x = 3t^3 + 2t$, $y = 2t^4 + t^3 + 2$, $z = t^4 - t^3 - t + 3$ es plana. Si lo es, determinar el plano que la contiene.
43. Demostrar que la siguiente curva es plana y encontrar la ecuación del plano que la contiene: $x = t^2 - 1$, $y = t^2 + 2t + 3$, $z = t + 1$.
44. Probar que si los planos normales de una curva tienen un punto en común, la curva está en una esfera de centro ese punto.
45. Sea la curva definida por las ecuaciones: $y = 2(1 - \cos x)$ $z = 3(x^2 - \operatorname{sen}^2 x)$.
Determinar el plano osculador y la circunferencia osculatriz en $x = 0$.
46. Calcular la circunferencia osculatriz de la elipse $(x^2/16) + (y^2/25) = 1$ en el punto $(0, 5)$, y hallar el orden de contacto de dichas curvas.
47. Determinar el orden de contacto de la curva $x = at$ $y = bt^2$ $z = t^3$, con la tangente, con el plano osculador y con la circunferencia osculatriz en el origen.

48. Se considera la curva definida paramétricamente por las ecuaciones: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^4$. Determinar el plano osculador y la circunferencia osculatriz en $(0, 0, 0)$.
49. Probar que si todas las rectas tangentes a una curva son paralelas entonces la curva es una recta.
50. Probar que si la normal principal a una curva tiene dirección constante, la curva es una recta.
51. Sea una curva de representación paramétrica $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$, si $\vec{\alpha}\,'(t)$ y $\vec{\alpha}''(t)$ son linealmente dependientes, entonces la curva es una recta.
52. Hallar la función f más general posible para que sea plana la curva
$$\vec{\alpha}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, f(t)).$$
53. Probar que la tangente a una curva en un punto y la tangente en el correspondiente punto de los centros de curvatura de la curva tienen direcciones perpendiculares.
54. Demostrar que si todos los planos osculadores de una curva pasan por un punto fijo, la curva está en un plano.
55. Hallar las evolutas de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 0$. Comprobar que la evoluta plana corresponde a otra cicloide.
56. Hallar una fórmula que exprese el ángulo θ entre la normal a una curva en un punto P que es tangente a una evoluta dada y la normal principal de la curva en P.
57. Hallar la involuta de la hélice circular $\vec{\alpha}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$. ¿Son curvas planas?
58. Demostrar que la curvatura y la binormal de una involuta $\mathcal{C}^*$ de la curva $\mathcal{C}$ viene dada por la expresión:
$$\kappa^{*^2} = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{(c - s)^2 \kappa^2}, \qquad \vec{b}^* = \frac{\kappa \vec{b} + \tau \vec{t}}{(c - s)\kappa\kappa^*}.$$
59. Demostrar que la normal principal de una evoluta $\mathcal{C}^*$ de la curva $\mathcal{C}$ es paralela a la tangente de $\mathcal{C}$.
60. Se denomina hélice general a aquella curva cuyas tangentes forman un ángulo constante con una dirección fija. Demostrar que: "Una curva es una hélice general si y sólo si sus binormales forman un ángulo constante con una recta fija".
61. Comprobar que la curva $\vec{\alpha}(t) = (2t, t^2, t^3/3)$ es una hélice general. Determinar el vector $\vec{u}$ que forma un ángulo constante con la tangente.
62. Dada una curva $\mathcal{C}$ se toma sobre cada tangente un segmento de longitud constante, cuyo extremo determina una curva $\mathcal{C}^*$. Demostrar que el plano normal a esta curva pasa por el correspondiente centro de curvatura de la primera.
63. Probar que si una curva es plana sus evolutas son hélices.

64. Si las normales principales a una curva son todas paralelas a un plano fijo, la curva es una hélice general.

65. Si $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ es una hélice general también lo es la curva

$$\vec{\beta}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\vec{t}(s) - \int_{s_0}^{s} \vec{n}(u)du.$$

66. Encontrar el plano tangente a la hélice $x = 4\ \cos u\ \ y = 4\ \operatorname{sen} u\ \ z = 8u$, en el punto correspondiente a $u = \pi/4$, que sea paralelo al eje OZ.

67. Probar que la curva $x = at,\ y = bt^2,\ z = t^3$, es una hélice general si y sólo si $2b^2 = 3a$. En este caso hallar el eje y la ecuación de la superficie cilíndrica en la que está contenida la curva.

68. Una curva de clase C^4 tal que $\kappa \neq 0 \neq \tau$, está en una esfera si y sólo si

$$\frac{\tau}{\kappa} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right) = 0.$$

69. Demostrar que los centros de las esferas osculatrices de una curva no esferica $\mathcal{C}$, forman otra curva $\mathcal{C}^*$ tal que sus tangentes son las rectas polares (Definición 3.12) de $\mathcal{C}$ en los puntos correspondientes.

70. Demostrar que el plano osculador en un punto P^* del lugar geométrico de los centros de las esferas osculatrices de una curva $\mathcal{C}$ es el plano normal en el punto P correspondiente de la curva.

71. Probar que el producto de la torsión de una hélice circular por la torsión del lugar geométrico de los centros de curvatura de dicha hélice es igual a κ^2.

72. Probar que una esfera tiene un contacto de orden 2 al menos con una curva regular en un punto, en el que $\kappa \neq 0 \neq \tau$, si y sólo si la circunferencia osculatriz de la curva en P queda sobre la esfera.

73. Dos curvas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$ reciben el nombre de curvas de Bertrand si sus normales principales son comunes. Demostrar que si $\mathcal{C}$ es una curva plana, existe siempre una curva $\mathcal{C}^*$ tal que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$ son curvas de Bertrand.

74. Demostrar que el producto de las torsiones de las curvas de Bertrand (Ejercicio 73) es constante.

75. Demostrar que $\operatorname{cotg}\left(\int \tau ds + c\right)$ es la razón de la torsión de una evoluta a su curvatura.

76. Los vectores tangentes unitarios al desplazarse a lo largo de una curva $\mathcal{C}$, engendran una curva sobre la esfera que tiene centro el origen y radio igual a 1, la cual recibe el nombre de indicatriz esférica de $\vec{t}$. Demostrar que una curva es una hélice general si y sólo si su indicatriz esférica tangente es una circunferencia.

77. Demostrar que la tangente a la indicatriz tangente de una curva es paralela a la tangente de su indicatriz binormal en puntos correspondientes.

78. Demostrar que la curvatura de la indicatriz binormal es ${\kappa^*}^2 = (\kappa^2 + \tau^2)/\tau^2$.

79. Demostrar que la torsión de la indicatriz tangente es

$$\tau^* = \frac{\kappa\dot{\tau} - \tau\dot{\kappa}}{\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}.$$

80. Dada la curva $\vec{\alpha}(s) = (x(s), y(s))$ en el plano de clase C^2, se considera la familia de rectas obtenidas girando la tangente a la curva un ángulo θ. Hallar la envolvente de la familia. Probar que tal envolvente es la proyección ortogonal sobre dichas rectas de los centros de curvatura de la curva dada.

81. Envolvente de la familia de curvas $\lambda^2 + 2(x+y)\lambda + x + y = 0$.

82. Envolvente de la familia de circunferencias de centro sobre la circunferencia $x^2 - 2axy + y^2 = 0$, y que pasan por el origen. Dar la expresión de la envolvente en polares.

83. Envolvente de la familia de curvas $y^4 - y^2 + (x - \lambda)^2 = 0$.

84. Envolvente de las circunferencias que tiene su centro en la parábola $y^2 = 2px$ y pasan por el vértice de dicha parábola.

85. Envolvente de las circunferencias $(x-a)^2 + y^2 = b^2$, $b^2 = 4am$.

86. Envolvente de las rectas que determinan sobre los ejes segmentos de longitud constante.

87. Probar que la evoluta plana de una curva plana coincide con la envolvente de las normales a la curva.

88. Envolvente de la familia de rectas $x \operatorname{sen} t - y \cos t = h(t)$. Hallar la evoluta de dicha envolvente.

89. Hallar la envolvente de las trayectorias descritas por un proyectil lanzado con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ y un ángulo θ, cuando $0 < \theta < \pi/2$.

Ejercicios de superficies

90. Hallar una representación paramétrica regular del cilindro recto que tiene por directriz la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en el plano XOY. Determinar las curvas coordenadas.

91. Demostrar que $\mathcal{M}$ es una superficie de revolución si y sólo si todas sus normales tienen intersección en una recta dada.

92. Sea la parábola $x = 0,\ y = z^2$ y la circunferencia $z = 0,\ x^2 + (y+1)^2 = 1$ que se desliza sobre la parábola conservándose paralela a XOY. Hallar la ecuacion de la superficie que genera (superficie de traslación).

93. Ecuación de la superficie de revolución engendrada por la parábola $y = x^2$, $z = 0$ al girar alrededor del eje OX.

94. Ecuación de la superficie engendrada por una recta variable que se apoya en la circunferencia: $x^2 + y^2 - 4 = 0,\ z = 0$ y en las rectas $r_1 :\ x = 0,\ z + 1 = 0$ y $r_2 :\ y = 0,\ z - 1 = 0$.

95. Sea la esfera $(x-a)^2+y^2+z^2=r^2$. Ecuación de la superficie engendrada por las rectas que se apoyan en OZ, paralelas al plano XOY y que permanecen tangentes a la esfera.

96. Se considera la superficie $xyz-1=0$. Hallar:

    (a) Plano tangente en el punto $(1,1,1)$

    (b) Planos tangentes que contengan a la recta $y=z,\ x+2y-3=0$.

    (c) Planos tangentes paralelos al plano $x+y+z=4$.

97. Demostrar que los planos tangentes a la superficie dada por $z=xf(y/x)$, f función diferenciable, pasan por el origen.

98. Hallar el plano paralelo al plano $x+y+z=0$ y tangente a la superficie
$$x=u^2+v^2, y=u^3, z=v^3.$$

99. Hallar el plano tangente a la superficie: $x\,f(x,y,z)+y\,g(x,y,z)=0$, en los puntos del eje OZ.

100. Demostrar que los planos tangentes a la superficie $z=x+f(y-z)$ son paralelos a una misma recta.

101. Supongamos que una superficie admite una parametrización de la forma
$$\vec{\mathbf{x}}(u,v)=\vec{\alpha}(u)+\vec{\beta}(v)$$
con $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ curvas regulares. Demostrar que los planos tangentes a lo largo de las líneas coordenadas son todos paralelos a una recta.

102. Probar que es constante la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos intersectados sobre los ejes coordenados por el plano tangente a la superficie
$$x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}.$$

103. Probar que el lugar geométrico de las proyecciones del centro del elipsoide $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ sobre sus planos tangentes es
$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2.$$

104. Demostrar que cuando un punto P se mueve a lo largo de una generatriz de un helicoide recto, la normal unitaria gira alrededor de la generatriz, de manera que la cotangente del ángulo que forma con el eje es proporcional a la distancia al eje.

105. Sobre la superficie cónica $x^2+y^2=z^2$ se considera una curva $\mathcal{C}$ cuya proyección sobre el plano XOY es $r=e^\theta$. Hallar la intersección del plano XOY con la recta normal a la curva $\mathcal{C}$ contenida en el plano tangente a la superficie en el punto correspondiente, según se vaya moviendo éste.

106. Envolvente de las esferas cuyo centro está sobre la elipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ del plano XOY y que pasan por el origen.

107. Envolvente de la familia de planos que determinan sobre los ejes de coordenadas los segmentos $t^2/(t+a),\ t^2/(t+b),\ t^2/(t+c)$, donde a,b,c son constantes.

108. Demostrar que la envolvente de una familia de esferas de radio constante b y centros sobre una circunferencia de radio $a > b$ es un toro, esto es, una superficie de revolución engendrada por una circunferencia de radio b y con centro a una distancia a del eje de revolución.
109. Envolvente de la familia de esferas $x^2 + y^2 + (z - \lambda)^2 = 2\lambda$.
110. Se consideran las esferas que tienen por diámetros las cuerdas de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,\ z = 0$, paralelas a uno de sus ejes de simetría. Hallar la envolvente de esta familia.
111. Envolvente y curvas características de la familia de planos:

$$x + \lambda^2 y + z - 2\lambda = 0.$$

112. Envolvente de la familia de esferas $(x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 + (z - \lambda)^2 = \lambda^2,\ \ \lambda \neq 0$.
113. Envolvente de los planos: $u^3 - 3u^2 x + 3uy - z = 0$.
114. Hallar la envolvente de la familia de planos:

$$x \operatorname{sen} u - y \cos u + z \operatorname{tag} \theta - au = 0, \qquad \text{con} \ \ \theta \text{ y } a \text{ constantes.}$$

115. Hallar la arista de retroceso de la envolvente de la familia de planos:

$$18a^2 x + y - 6az - 3a^4 = 0.$$

116. Probar que la envolvente de la familia de planos osculadores de una curva de clase C^3 de torsión no nula coincide con la superficie formada por las tangentes a dicha curva. En otras palabras, la curva es la arista de retroceso de la envolvente de los planos osculadores.
117. Envolvente de la familia de planos $x \cos u + y \operatorname{sen} u = 0$.
118. Hallar la envolvente de la familia de planos normales a una curva de clase C^2 y curvatura no nula. Hallar la arista de retroceso.
119. Hallar la envolvente de la familia de planos rectificantes de una curva de clase C^3 con curvatura no nula. Probar que las lineas características tienen la dirección del vector de Darboux (Ejercicio 35) en los puntos correspondientes.
120. Sea la hélice $x = a \cos t,\ y = a \operatorname{sen} t,\ z = bt$. Hallar la envolvente de los planos osculadores, de los planos normales y de los planos rectificantes. Arista de retroceso en cada caso.
121. Envolvente de la familia de superficies $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = \alpha^2 + \beta^2$.
122. Envolvente de la familia de superficies $2\lambda x + 2\mu y + z = \lambda^2 + \mu^2$.
123. Hallar la envolvente de los elipsoides de volumen constante cuyos ejes coinciden con los coordenados.
124. Probar que la envolvente de los planos que forman con los tres planos coordenados un tetraedro de volumen constante c, es la superficie $xyz = (2/9)c$.
125. Envolvente de las esferas cuyos centros se encuentran en el plano $z = 0$ y cuyos radios son proporcionales a la distancia de su centro al origen de coordenadas.

126. Envolvente de la familia de planos $\lambda x - y + \mu z - \lambda^2 \mu = 0$, cuando:

 1) varía sólo μ. 2) varía sólo λ. 3) varían λ y μ. 4) $\lambda \mu^2 = k$.

 Hallar la arista de retroceso en este último caso.

127. Hallar la envolvente de la familia de esferas:

 (a) De radio 1 y cuyos centros describen la curva $y = 0,\ x^2 + z^2 = 1$.

 (b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda x - 2\mu y + (\lambda^2 + \mu^2 - 1)z - \mu^2 = 0$.

128. Hallar la envolvente de la familia de esferas que pasan por el origen y cuyos centros describen la curva $z = 0,\ 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$.

129. Hallar la representación paramétrica de la superficie de las binormales a una curva y estudiar si es desarrollable.

130. Hallar las superficies desarrollables generadas por las rectas que se apoyan en la parábola $y^2 = 4x,\ z = 0$ y forman con el eje OZ un ángulo de $45°$.

131. Hallar la ecuación de un conoide (superficie generada por rectas perpendiculares a un eje fijo (eje) que se apoyan sobre una curva (directriz)) cuyo eje coincide con el eje OZ y la directriz es la recta $x = at + 1,\ y = bt,\ z = ct$. Determinar la línea de estricción de la superficie y probar que está contenida en un plano.

132. Hallar el conoide (Ejercicio 131) de eje $x = 0,\ y = 0$ y directriz:

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = bt.$$

133. Hallar la arista de retroceso de la superficie desarrollable generada por las rectas

$$x = 3t^2 z - 2t^3 - 3t^2, \qquad y = 4tz - 2t^2 - 4t - 1.$$

134. Hallar las generatrices rectilíneas de las superficies:

$$x = uv + \cos v, \quad y = u\cos v + \operatorname{sen} v, \quad z = u\cos v + v.$$

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 6yz + 4y - 1 = 0.$$

135. Demostrar que la superficie reglada generada por las binormales de una curva de torsión no nula tiene dicha curva $\mathcal{C}$ como línea de estricción. En un punto P de $\mathcal{C}$, el plano central es el plano rectificante de $\mathcal{C}$. La normal a la superficie es la normal principal de la curva $\mathcal{C}$. El parámetro de distribución es τ.

136. Determinar la superficie reglada cuyas generatrices rectilíneas vienen dadas por las ecuaciones $y = tx + 2t + 1,\ z = (t-1)x - 3t$, y calcular el plano tangente a la superficie en un punto P_0 de la generatriz t_0.

137. Ecuación de la superficie reglada cuyas generatrices rectilíneas vienen dadas por las ecuaciones $y = a(t)x + h(t),\ z = b(t)x + k(t)$. Hallar la condición para que sea desarrollable.

138. Hallar la línea de estricción de la superficie engendrada al girar la recta: $y = z,\ x = 1$ alrededor del eje OZ.

139. Ecuación de la arista de retroceso de la superficie desarrollable cuyas generatrices se apoyan en las curvas
a) $x = 0,\ \ z^2 = 4y$; b) $x = 1,\ \ y^2 = 4z$.

140. Determinar la función f para que la superficie reglada de ecuaciones

$$x = tz + f(t), \qquad y = f(t)z + t^3/3$$

sea desarrollable. Calcular la arista de retroceso.

141. Dada la superficie reglada $x = tu + t^2, y = t^2u + t, z = u$. Determinar: plano tangente, plano asintótico, plano central, punto central, línea de estricción y parámetro de distribución.

142. Hallar la línea de estricción de la superficie $x^2 + y^2 - 4z^2 - 1 = 0$.

143. Dada la superficie $(x - 2z)^2 - y^2z = 0$, hallar la proyección sobre $z = 0$ de la línea de estricción.

144. La superficie $x = u^2 + 2uv,\ \ y = u + v,\ \ z = u^3 + 3u^2v$ es reglada. Estudiar si es desarrollable.

145. Demostrar que si todos los planos tangentes a una superficie pasan por un punto fijo, entonces se trata de una superficie cónica.

146. Si todos los planos tangentes a una superficie son paralelos a una recta entonces es una superficie cilíndrica.

147. Demostrar que las normales en los puntos de una recta generatriz de una superficie cilíndrica son paralelas.

148. Hallar la ecuación de la superficie engendrada por las tangentes a la hélice circular. Demostrar que las normales a esta superficie forman un ángulo constante con el eje OZ.

149. Ecuación de la superficie cónica de vértice $(0, 0, 0)$ y directriz la curva
$x - 3 = 0,\ \ y^2 + z^2 - 16 = 0$.

150. Ecuación de la superficie cónica de vértice $(1, 1, 1)$ y directriz $x = t^3,\ \ y = t^2,\ \ z = t$.

151. Ecuación del cilindro de generatrices paralelas a la recta $y = x,\ \ z = 0$, y que pasan por la curva $y = x^2,\ \ x = z^2$.

152. Ecuación de la superficie tangente a la curva $x = t,\ \ y = t^2,\ \ z = t^3$.

153. Componentes en coordenadas curvilíneas locales del vector tangente al meridiano y paralelo en el punto de coordenadas (θ_0, ϕ_0) de la esfera:

$$x = a\,\cos\theta\,\cos\phi,\ \ y = a\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi,\ \ z = a\,\operatorname{sen}\theta.$$

154. Hallar la 1ª forma fundamental del plano en coordenadas cartesianas respecto de una base ortonormal. Calcular los g^{ij}. Lo mismo si las coordenadas del plano son las polares.

155. Hallar la 1ª forma fundamental y los g^{ij} de las superficies:

(a) Esfera : $x = a\,\cos\theta\,\cos\phi,\ \ y = a\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi,\ \ z = a\,\operatorname{sen}\theta$.

(b) Superficie de revolución: $x = f(u)\cos v$, $y = f(u)\operatorname{sen} v$, $z = h(u)$.

(c) Catenoide : $x = a\cosh(u/a)\cos v$, $y = a\cosh(u/a)\operatorname{sen} v$, $z = u$.

(d) Pseudoesfera: $x = a\operatorname{sen} u\cos v$, $y = a\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v$, $z = a(\cos u + \ln\operatorname{tag}(u/a))$.

(e) Helicoide: $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, $z = av$.

(f) Desarrollable tangente de arista de retroceso $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$, s parámetro natural.

(g) Toro: $x = (b + a\cos u)\cos v$, $y = (b + a\cos u)\operatorname{sen} v$, $z = a\operatorname{sen} u$.

(h) Elipsoide: $x = a\cos u\cos v$, $y = b\cos u\operatorname{sen} v$, $z = c\operatorname{sen} u$.

(i) Paraboloide hiperbólico : $x = a(u + v)$, $y = b(u - v)$, $z = uv$.

(j) $x = ue^{av}\cos v$, $y = ue^{av}\operatorname{sen} v$, $z = f(u)e^{av}$.

156. Estudiar si las líneas coordenadas de las superficies siguientes son ortogonales: plano en cartesianas, plano en polares, esfera en coordenadas esféricas.

157. Demostrar que sobre una superficie de 1ª forma fundamental:
$$I = du^2 + G(u, v)dv^2$$
son ortogonales las dos familias uniparamétricas de curvas definidas por las ecuaciones diferenciales
$$du + \sqrt{G(u, v)}\,dv = 0 \quad \text{y} \quad du - \sqrt{G(u, v)}\,dv = 0.$$

158. Hallar la función f para que las líneas coordenadas de la superficie siguiente sean ortogonales:
$$x = ue^{av}\cos v, \quad y = ue^{av}\operatorname{sen} v, \quad z = f(u)e^{av}.$$

159. Hallar la condición que deben verificar las curvas $\phi(u^1, u^2) = cte.$, $\psi(u^1, u^2) = cte.$, sobre la superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$, para que sean ortogonales.

160. Dada una familia uniparamétrica de curvas sobre una superficie, se llama trayectoria isogonal de esta familia a una curva que intersecta a todas las de la familia con un ángulo constante $\theta \neq 0$. Si $\theta = \pi/2$, la curva se llama trayectoria ortogonal. Calcular las trayectorias isogonales de la familia de rectas del cilindro circular $x = a\cos u^1$, $y = a\operatorname{sen} u^1$, $z = u^2$.

161. Hallar las trayectorias isogonales (Ejercicio 160) de los meridianos de una esfera (loxodromas).

162. Demostrar que las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $M\,du^1 + N\,du^2 = 0$ están dadas por : $(g_{11}N - g_{12}M)du^1 + (g_{12}N - g_{22}M)du^2 = 0$. Utilizar esta fórmula para obtener las trayectorias ortogonales de las curvas $r = \lambda\cos\theta$ en el plano, para todos los valores de λ.

163. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que las curvas
$$A(du^1)^2 + 2Bdu^1du^2 + C(du^2)^2 = 0 \qquad (A, B, C \text{ funciones de } u^1,\ u^2)$$
formen una red ortogonal es que $g_{11}C - 2g_{12}B + g_{22}A = 0$.

164. Hallar las trayectorias ortogonales a las secciones planas $z = cte.$ del paraboloide $x^2 - y^2 = z$.

165. Hallar la familia de curvas ortogonales a las curvas $u \cos v = cte.$ sobre el helicoide recto.

166. Tomando líneas coordenadas ortogonales, demostrar que la ecuación diferencial de las curvas que son bisectrices de los ángulos que forman dichas líneas coordenadas es:
$$g_{11}(du^1)^2 - g_{22}(du^2)^2 = 0.$$

167. Hallar la longitud de la curva
$$u = e^{\frac{cotag\,\beta}{\sqrt{2}}\theta}, \qquad 0 < \theta < \pi,\ \beta = cte.$$
contenida en el cono $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u,\theta) = (u \cos \theta,\ u \operatorname{sen}\theta,\ u)$. Demostrar que dicha curva corta a las generatrices del cono bajo un ángulo constante.

168. Hallar la intersección del helicoide $x = u \cos v,\ y = u \operatorname{sen} v,\ z = v$ con la recta $x = 1,\ y = 0$, y el ángulo de esta recta y la superficie en los puntos de intersección. (El ángulo entre curva y superficie se define como el ángulo entre la tangente a la curva y el plano tangente a la superficie).

169. Intersección del helicoide $x = u \cos v,\quad y = u \operatorname{sen} v,\quad z = v$ con la hélice $x = \cos t,\quad y = \operatorname{sen} t,\quad z = -t$. Angulo entre la hélice y el helicoide en los puntos de intersección.

170. Demostrar que el ángulo θ entre la superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ y la curva $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ en un punto común que corresponde a los valores $t_0,\ u_0^1,\ u_0^2$ de los parámetros viene dado por
$$\cos\theta = \frac{[\vec{\mathbf{x}}_1\ \ \vec{\mathbf{x}}_2\ \ \vec{\alpha}\,']}{\|(\vec{\mathbf{x}}_1 \times \vec{\mathbf{x}}_2\|\ \|\vec{\alpha}\,'\|}.$$

171. Demostrar que si todas las rectas normales a una superficie son concurrentes, entonces la superficie es una esfera o parte de ella.

172. Sea $x = f(t),\quad z = g(t)\quad (a < t < b)$, una curva regular $\mathcal{C}$ de clase C^n en el plano XOZ, con $f(t) > 0$. Hallar una representación paramétrica de la superficie obtenida al girar $\mathcal{C}$ alrededor de eje OZ. Demostrar que las líneas coordenadas son ortogonales.

173. Sea la hélice $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ z = t$, y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Hallar los puntos de intersección y el ángulo que forma la hélice y la esfera en esos puntos.

174. Demostrar que el ángulo θ entre la curva $\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y la superficie $F(x, y, z) = 0$ en un punto común viene dado por:
$$\cos\theta = \frac{F_x x' + F_y y' + F_z z'}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

175. En la superficie $\mathcal{M}$: $z = f(x,y)$, con $f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Demuéstrese que:

a) Los vectores de $T_O(\mathbb{R}^3)$, $\vec{v}_1 = (1,0,0)$ y $\vec{v}_2 = (0,1,0)$ son tangentes a $\mathcal{M}$ en el origen $O(0,0,0)$, y que

$$\vec{\mathbf{N}} = \frac{-f'_x E_1 - f'_y E_2 + E_3}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}$$

es un campo de vectores normal y unitario a $\mathcal{M}$.

b) El operador forma viene dado por

$$S(\vec{v}_1) = f''_{xx}(0,0)\vec{v}_1 + f''_{xy}(0,0)\vec{v}_2; \quad S(\vec{v}_2) = f''_{yx}(0,0)\vec{v}_1 + f''_{yy}(0,0)\vec{v}_2.$$

c) En cada caso siguiente, exprésese $S(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2)$ en términos de $\vec{v}_1 = (1,0,0)$ y $\vec{v}_2 = (0,1,0)$, y determínese el rango de S en $(0,0,0)$:
a) $z = xy$; *b*) $z = 2x^2 + y^2$; *c*) $z = (x+y)^2$; *d*) $z = xy^2$.

176. Sea $\mathcal{M}$ una superficie en $\mathbb{R}^3$ con campo de vectores normal y unitario $\vec{\mathbf{N}} = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3$. Entonces la aplicación de Gauss $G : \mathcal{M} \to S^2$ de $\mathcal{M}$ transforma cada punto P en el punto $(a_1(P), a_2(P), a_3(P))$ de la esfera unidad S^2.

En cada una de las superficies siguientes, determínese la imagen de la aplicación de Gauss:

a) El cilindro, $x^2 + y^2 = r^2$. c) El plano, $x + y + z = 0$.
b) El cono, $z^2 = x^2 + y^2$. d) La esfera, $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 1$.

177. Sea $G : \mathbb{T} \to S^2$ la aplicación de Gauss (Ejercicio 176) del toro derivada de su normal unitaria hacia afuera, $\vec{\mathbf{N}}$. ¿Cuáles son las curvas imagen mediante G de los meridianos y paralelos de $\mathbb{T}$? ¿Qué puntos de S^2 son imagen de exactamente dos puntos de $\mathbb{T}$?

178. Encontrar las curvaturas principales y los vectores principales del cilindro circular, en cada uno de sus puntos, y de la silla de montar ($z = xy$), en el origen.

179. En cada una de las superficies siguientes, hállese la aproximación cuadrática en las proximidades del origen:

a) $z = exp(x^2 + y^2) - 1$.
b) $z = \ln\cos x - \ln\cos y$.
c) $z = (x + 3y)^3$.

180. Demuéstrese que no hay puntos umbilicales en una superficie en la que $K < 0$; y, que si $K = 0$, los puntos umbilicales son puntos planos.

181. Demuéstrese que la curvatura media de las curvaturas normales en dos direcciones ortogonales cualesquiera en P es $H(P)$.

182. La curvatura media es

$$H(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(\theta)d(\theta),$$

donde $k(\theta)$ es la curvatura normal, expresada en función de las curvaturas normales principales por

$$k(\theta) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \operatorname{sen}^2\theta.$$

183. Para una carta de Monge $\vec{\mathbf{x}}(u,v) = (u, v, f(u,v))$ verifíquese que

$$g_{11} = 1 + f_u^2; \quad g_{12} = f_u f_v; \quad g_{22} = 1 + f_v^2;$$

$$L_{11} = \frac{f_{uu}}{W}; \quad L_{12} = \frac{f_{uv}}{W}; \quad L_{22} = \frac{f_{vv}}{W};$$

donde $W = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$. Encuéntrense las fórmulas de K y H.

184. Las líneas paramétricas de una superficie $\mathcal{M}$ son ortogonales cuando $g_{12} = 0$ (es decir, cuando $\vec{\mathbf{x}}_u$ y $\vec{\mathbf{x}}_v$ son ortogonales en cada punto). Verifíquese que

$$S(\vec{\mathbf{x}}_1) = \frac{L_{11}}{g_{11}}\vec{\mathbf{x}}_1 + \frac{L_{12}}{g_{22}}\vec{\mathbf{x}}_2; \;\; S(\vec{\mathbf{x}}_2) = \frac{L_{12}}{g_{11}}\vec{\mathbf{x}}_1 + \frac{L_{22}}{g_{22}}\vec{\mathbf{x}}_2.$$

185. Demuéstrese que un vector tangente $\vec{v} = v^1\vec{\mathbf{x}}_1 + v^2\vec{\mathbf{x}}_2$ determina una dirección principal si y sólo si

$$\begin{vmatrix} (v^2)^2 & -v^1v^2 & (v^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ L_{11} & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

(Indicación: La dirección de $\vec{v}$ es principal si y sólo si el vector normal $S(\vec{v}) \times \vec{v}$ es cero).

186. Verifíquese que el punto $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ es un punto umbilical si y sólo si existe un número k tal que

$$L_{11} = kg_{11}, \quad L_{12} = kg_{12}, \quad L_{22} = kg_{22}.$$

(k es la curvatura principal $k_1 = k_2$).

187. Si $\vec{v} = v^1\vec{\mathbf{x}}_1 + v^2\vec{\mathbf{x}}_2$ es tangente a $\mathcal{M}$ en $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$, la curvatura normal en la dirección determinada por $\vec{v}$ es

$$k(\vec{v}) = \frac{L_{11}(v^1)^2 + 2L_{12}v^1v^2 + L_{22}(v^2)^2}{g_{11}(v^1)^2 + 2g_{12}v^1v^2 + g_{22}(v^2)^2}.$$

188. Demuéstrese que una curva $\vec{\alpha}$ sobre una superficie $\mathcal{M}$ es una recta de $I\!R^3$ si y sólo si es geodésica y asintótica.

189. ¿A cuál de los tres tipos (principal, asintótica, geodésica) pertenecen las curvas siguientes?:

a) La circunferencia superior en el toro.

b) El ecuador del toro.

c) El eje OX en $\mathcal{M}: z = xy$.

(Se debe suponer que tenemos parametrizaciones con $\|\vec{\alpha}\,'\| = cte.$)

190. Sea $\vec{\alpha}$ una curva asintótica en $\mathcal{M} \subset I\!R^3$:

a) Demostrar que la binormal $\vec{b}$ de $\vec{\alpha}$ es perpendicular a la superficie a lo largo de $\vec{\alpha}$, y dedúzcase que $S(\vec{t}) = \tau\vec{n}$.

b) A lo largo de $\vec{\alpha}$, la superficie tiene curvatura de Gauss $K = -\tau^2$.

c) Aplíquese b) para calcular la curvatura de Gauss del helicoide recto.

191. Sea $\vec{\alpha}$ una curva situada en dos superficies $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^*$ que forman un ángulo constante a lo largo de $\vec{\alpha}$. Demuéstrese que $\vec{\alpha}$ es línea de curvatura en $\mathcal{M}$ si y sólo si es línea de curvatura en $\mathcal{M}^*$.

192. Si $\vec{\mathbf{x}}$ es una representación paramétrica de una superfie $\mathcal{M}$, demuéstrese, que una curva $\vec{\alpha}(t) = \vec{\mathbf{x}}(a^1(t), a^2(t))$ es

a) línea de curvatura si y sólo si

$$\begin{vmatrix} (a^2)'^2 & -a'^1a'^2 & (a^1)'^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ L_{11} & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

b) línea asintótica si y sólo si

$$L_{11}(a^1)'^2 + 2L_{12}(a^1)'(a^2)' + L_{22}(a^2)'^2 = 0.$$

193. Sea $\vec{\alpha}$ una curva con parametrización natural en una superficie $\mathcal{M} \subset I\!R^3$. En lugar del campo de sistemas de referencia de Frenet de $\vec{\alpha}$, consideremos el campo de sistema de referencia $\{\vec{t}, \vec{u}, \vec{\mathbf{N}}\}$, donde $\vec{t}$ es la tangente unitaria de $\vec{\alpha}$, $\vec{\mathbf{N}}$ es la normal de la superficie restringuida a $\vec{\alpha}$ y $\vec{u} = \vec{\mathbf{N}} \times \vec{t}$.

a) Verifíquese que

$$\begin{array}{rcrrr} d\vec{t}/ds & = & & \kappa_g\vec{u} & +\kappa_n\vec{\mathbf{N}} \\ d\vec{u}/ds & = & -\kappa_g\vec{t} & & +\tau_g\vec{\mathbf{N}} \\ d\vec{\mathbf{N}}/ds & = & -\kappa_n\vec{t} & -\tau_g\vec{u} & \end{array}$$

donde $\kappa_n = S(\vec{t}) \cdot \vec{t}$ es la curvatura normal $k(\vec{t})$ de $\mathcal{M}$ en la direción de $\vec{t}$, $\tau_g = S(\vec{t}) \cdot \vec{u}$ es la denominada torsión geodésica y κ_g se llama curvatura geodésica de $\vec{\alpha}$.

b) Deducir que $\vec{\alpha}$ es geodésica si y sólo si $\kappa_g = 0$.

$\vec{\alpha}$ es asintótica si y sólo si $\kappa_n = 0$.

$\vec{\alpha}$ es principal si y sólo si $\tau_g = 0$.

194. Si $\vec{\alpha}$ es una curva con parametrización unitaria sobre una superficie $\mathcal{M}$, pruébese que:

(a) $\vec{\alpha}$ es principal y geodésica si y sólo si $\vec{\alpha}$ está en un plano que es ortogonal a $\mathcal{M}$ a lo largo de $\vec{\alpha}$.

(b) $\vec{\alpha}$ es principal y asintótica si y sólo si $\vec{\alpha}$ está en un plano que es tangente a $\mathcal{M}$ a lo largo de $\vec{\alpha}$.

195. Determínese la curvatura de Gauss de las superficies desarrollables (conos, cilindros y supeficies tangenciales).

196. Sea $\vec{\alpha}$ una curva regular en una superficie $\mathcal{M} \subset I\!R^3$, y sea $\vec{\mathbf{N}}$ la normal unitaria a $\mathcal{M}$ a lo largo de $\vec{\alpha}$. Demostrar que $\vec{\alpha}$ es principal en $\mathcal{M}$ si y sólo si la superficie reglada $\vec{\mathbf{x}}(u,v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{\mathbf{N}}(u)$ es llana (de curvatura de Gauss nula).

197. Demostrar que las líneas de curvatura son las únicas curvas de una superficie $\mathcal{M}$ a lo largo de las cuales las normales a $\mathcal{M}$ engendran una superficie desarrollable.

198. Para que dos superficies se corten bajo un ángulo constante, es necesario y suficiente que la curva intersección tenga la misma torsión geodésica relativa a las dos superficies.

Nota: La torsión geodésica τ_g de una curva en una superficie de normal unitaria $\vec{\mathbf{N}}$, está definida por (Ejercicio 193)

$$\frac{d\vec{\mathbf{N}}}{ds} = -\kappa_n \vec{t} - \tau_g \vec{u}, \qquad \text{donde} \quad \vec{u} = \vec{\mathbf{N}} \times \vec{t}.$$

199. Supongamos que una superficie $\mathcal{M}$ admite una familia de líneas de curvatura $\mathcal{F}_1$ que son al mismo tiempo geodésicas de $\mathcal{M}$. Mostrar que las curvas de la otra familia $\mathcal{F}_2$ de líneas de curvatura son ortogonales en cada uno de sus puntos, a un plano conteniendo a una curva de la familia $\mathcal{F}_1$.

200. Demostrar que las líneas asintóticas de la superficie $z - x^4 + y^4 = 0$ son las intersecciones de dicha superficie con las familias de cilindros:

$$x^2 + y^2 = c_1; \qquad x^2 - y^2 = c_2,$$

201. Probar que, si $(g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2)$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \ln g}{\partial u^1} = \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \ln g}{\partial u^2} = \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2.$$

202. Utilizando las ecuaciones de Weingarten demostrar que

$$\vec{\mathbf{N}}_1 \times \vec{\mathbf{N}}_2 = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\; K\vec{\mathbf{N}},$$

donde $\vec{\mathbf{N}}$ es la normal unitaria, K la curvatura de Gauss y g_{ij} los coeficientes de la primera forma fundamental.

203. Hallar los símbolos de Christoffel de las siguientes superficies:

a) Esfera : $x = a\cos\theta\cos\phi$, $y = a\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$, $z = a\,\mathrm{sen}\,\theta$.

b) Superficie de revolución: $x = f(u)\cos v$, $y = f(u)\,\mathrm{sen}\,v$, $z = h(u)$.

c) Catenoide : $x = a\cosh(u/a)\cos v$, $y = a\cosh(u/a)\,\mathrm{sen}\,v$, $z = u$.

d) Pseudoesfera: $x = a\,\mathrm{sen}\,u\cos v$, $y = a\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v$, $z = a(\cos u + \ln\mathrm{tag}(u/a))$.

e) Helicoide: $x = u\cos v$, $y = u\,\mathrm{sen}\,v$, $z = av$.

f) Desarrollable tangente de arista de retroceso $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$, s parámetro natural.

g) Toro: $x = (b + a\cos u)\cos v$, $y = (b + a\cos u)\,\mathrm{sen}\,v$, $z = a\,\mathrm{sen}\,u$.

h) Elipsoide: $x = a\cos u\cos v$, $y = b\cos u\,\mathrm{sen}\,v$, $z = c\,\mathrm{sen}\,u$.

i) Paraboloide hiperbólico : $x = a(u + v)$, $y = b(u - v)$, $z = uv$.

j) $x = ue^{av}\cos v$, $y = ue^{av}\,\mathrm{sen}\,v$, $z = f(u)e^{av}$.

204. Dada una superficie con primera forma fundamental

$$I = (du^1)^2 + G(u^1, u^2)(du^2)^2$$

(coordenadas semigeodésicas). Hallar los símbolos de Christoffel.

Idem, si la primera forma fundamental es $I = (\rho(u^1, u^2))^2((du^1)^2 + (du^2)^2)$ (coordenadas isotermas).

205. Sea una superficie con coordenadas ortogonales. Probar que la curvatura de Gauss viene dada por

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u^1}\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial u^2}\right)\right].$$

Idem, en coordenadas isotermas: $g_{11} = g_{22} = \rho^2,\ g_{12} = 0$,

$$K = -\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial^2\ln\rho}{\partial u^1\partial u^1} + \frac{\partial^2\ln\rho}{\partial u^2\partial u^2}\right].$$

Idem, en coordenadas semigeodésicas: $g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = G$,

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^1\partial u^1}.$$

206. Probar que en una superficie en la que las líneas de curvatura son líneas coordenadas se tiene: (Utilizar las condiciones de integrabilidad de Codazzi)

$$\frac{\partial\kappa_1}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}(\kappa_2 - \kappa_1) = (\kappa_2 - \kappa_1)\frac{\partial\ln\sqrt{g_{11}}}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial\kappa_2}{\partial u^1} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}(\kappa_1 - \kappa_2) = (\kappa_1 - \kappa_2)\frac{\partial\ln\sqrt{g_{22}}}{\partial u^1}.$$

207. Probar que las formas siguientes no valen como 1ª y 2ª formas fundamentales de una superficie:

a) $I = (du^1)^2 + (du^2)^2, \qquad II = (du^1)^2 - (du^2)^2.$

b) $I = (du^1)^2 + \cos^2 u^1 (du^2)^2, \qquad II = \cos^2 u^1 (du^1)^2 + (du^2)^2.$

208. Hallar la ecuación de la superficie con primera y segunda forma fundamental

$$I = du^2 + dv^2, \qquad II = du^2.$$

209. Probar que las formas siguientes determinan una superficie:

$$I = (1+4u^2)du^2 - 4uv\,du\,dv + (1+4v^2)dv^2,$$

$$II = \frac{2du^2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} - \frac{2dv^2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}.$$

210. Demostrar que la aplicación entre la catenoide

$$x = a\,\cosh(\frac{u^1}{a})\cos u^2, \quad y = a\,\cosh(\frac{u^1}{a})\operatorname{sen} u^2, \quad z = u^1.$$

y el helicoide: $\quad x = v^1 \cos v^2, \quad y = v^1 \operatorname{sen} v^2, \quad z = av^2,$

dada por $v^1 = a\operatorname{senh}(u^1/a), \quad v^2 = u^2$ es una isometría.

¿En qué se transforman los meridianos y paralelos de la catenoide?

211. Sea una curva $\mathcal{C}$

a) Demostrar que la superficie formada por las polares (Definición 3.12) a $\mathcal{C}$ es desarrollable.

b) Comprobar que las evolutas de $\mathcal{C}$ están contenidas en dicha superficie.

c) Por ser desarrollable es isométrica al plano, probar que las evolutas se transforman en líneas rectas por dicha isometría.

212. Si sobre una superficie existe un sistema de coordenadas ortogonales tal que $g_{11} = g_{11}(u^1)$ y $g_{22} = g_{22}(u^1)$, la superficie es localmente isométrica a una superficie de revolución.

213. Si entre dos puntos P y Q del espacio con vectores de posición respectivos $\vec{x}$ e $\vec{y}$ existe la relación $\vec{y} = a^2\vec{x}/\vec{x}^2$, se dice que la correspondencia es una inversión. Demostrar que la aplicación obtenida entre dos superficies por una inversión es conformes.

214. Demostrar que la esfera es localmente conforme al plano a través de la proyección estereográfica.

215. Hallar la curvatura geodésica de la hélice $x = a\,\cos t, \quad y = a\,\operatorname{sen} t, \quad z = t$ sobre:

a) El cilindro: $x = a\,\cos u, \quad y = a\,\operatorname{sen} u, \quad z = v.$

b) El helicoide: $x = u\,\cos v, \quad y = u\,\operatorname{sen} v, \quad z = v.$

216. A) Sobre la superficie $x = u\cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = f(u) \quad$ (f función de clase C^2), hallar la curvatura geodésica de las curvas coordenadas.

B) Probar que los meridianos de las esferas tienen curvatura geodésica nula.

217. Las curvas paramétricas de una superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ de clase $n > 2$ son geodésicas si y sólo si $\Gamma^1_{22} = 0$ y $\Gamma^2_{11} = 0$, respectivamente.

218. Probar que toda curva es una geodésica de la superficie generada por sus binormales.

219. Probar que la proyección desde el centro de una esfera sobre otra esfera concéntrica de diferente radio aplica líneas geodésicas en líneas geodésicas, aunque no es una isometría.

220. Sea una superficie de ecuación $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u, v)$ cuya primera forma fundamental es $I = du^2 + f(u, v)dv^2$. Probar que las curvas $v = cte.$ son geodésicas.

221. Demostrar que si las coordenadas curvilíneas de una superficie son ortogonales, entonces la curvatura geodésica de las curvas coordenadas es

$$u^2 = cte.: \quad -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial \ln \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2}; \qquad\qquad u^1 = cte.: \quad \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial \ln \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1}.$$

222. Sea $\vec{\alpha}(s) = \vec{\mathbf{x}}(u^1(s), u^2(s))$ una geodésica en una superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ tal que $g_{11} = g_{11}(u^1),\ g_{12} = 0,\ g_{22} = g_{22}(u^1)$.

Probar que $\sqrt{g_{22}}\cos\theta = cte.$, siendo θ el ángulo que forma la geodésica con las curvas $u^1 = cte.$

223. Sea $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ una superficie de clase ≥ 2 tal que $g_{11} = g_{11}(u^1), \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = g_{22}(u^1)$. Probar que:

a) Las curvas coordenadas $u^2 = cte.$ son geodésicas.

b) Las curvas coordenadas $u^1 = cte.$ son geodésicas si y sólo si $\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^1}_{|u^1_0} = 0.$

c) La curva $\vec{\alpha}(u^1) = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2(u^1))$ es geodésica si y sólo si

$$u^2 = \pm \int \frac{c\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{22} - c^2}}du^1.$$

224. Probar que en una superficie de revolución todos los meridianos son geodésicos, pero para que el paralelo que pasa por un punto P de un meridiano sea geodésico es necesario y suficiente que la tangente al meridiano en P sea paralela al eje de revolución.

225. Hallar las geodésicas del plano dado en coordenadas polares.

226. Si una geodésica en una superficie de revolución forma un ángulo θ con los meridianos a lo largo de la geodésica, entonces se verifica que

$$u \operatorname{sen}\theta = cte. \qquad \text{(siendo } u \text{ el radio del paralelo)}$$

227. Probar que las curvas de la familia $v^3/u^2 = cte.$ son geodésicas sobre la superficie de primera forma fundamental

$$I = v^2du^2 - 2uvdu\,dv + 2u^2dv^2.$$

228. Sea la parametrización de la esfera de radio a

$$\vec{\mathbf{x}}(\theta,\phi) = (a\,\cos\theta\,\cos\phi, a\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi, a\,\operatorname{sen}\theta).$$

Calcular la derivada covariante respecto a ϕ del campo de vectores unitario formado por las tangentes unitarias a los meridianos a lo largo del paralelo $\theta = \theta_0$.

229. Sea $\vec{\alpha}$ una curva alabeada. Consideremos la superficie generada por las binormales : $\vec{\mathbf{x}}(u,s) = \vec{\alpha}(s) + u\vec{b}(s)$. Calcular las derivadas covariantes a lo largo de las curvas coordenadas del campo de vectores tangente unitario a las líneas paramétricas $s = cte.$

230. Sea $\mathcal{C}$ el paralelo $\theta = \theta_0$ sobre la esfera de ecuación:

$$\vec{\mathbf{x}}(\theta,\phi) = (a\,\operatorname{sen}\theta\,\cos\phi, \quad a\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\phi, \quad a\,\cos\theta).$$

A) Probar que el transporte paralelo del vector $\vec{\mathbf{x}}_1(\theta_0,\phi)$ a lo largo de $\mathcal{C}$ es

$$Y(\phi) = \cos((\cos\theta_0)(\phi-\phi_0)\vec{\mathbf{x}}_1 - \frac{\operatorname{sen}((\cos\theta_0)(\phi-\phi_0))}{\operatorname{sen}\theta_0}\vec{\mathbf{x}}_2.$$

B) $Y(0) = Y(2\pi) \Rightarrow \mathcal{C}$ es el ecuador.

231. Consideremos la esfera

$$\vec{\mathbf{x}}(u^1,u^2) = (\cos u^2\cos u^1, \ \ \cos u^2\operatorname{sen} u^1, \ \ \operatorname{sen} u^2).$$

Se desplaza paralelamente el vector de componentes $(1,0)$ desde el punto de coordenadas $(0,0)$ hasta el punto $(\pi/\sqrt{2},0)$ a lo largo del ecuador, luego hasta el punto $(\pi/\sqrt{2},\pi/4)$ a lo largo del meridiano $u^1 = \pi/\sqrt{2}$, después hasta el punto $(0,\pi/4)$ a través del paralelo $u^2 = \pi/4$, y por último hasta el punto inicial por el meridiano $u^1 = 0$. Determinar el ángulo entre el vector dado y el vector obtenido al final del desplazamiento.

232. Verificar la fórmula de Gauss-Bonnet para la imagen sobre la esfera de radio 1:

$$\vec{\mathbf{x}}(\theta,\phi) = (\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi, \quad \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\phi, \quad \cos\phi),$$

del polígono de lados: $0 \le \theta \le \pi/2$, $\phi = \pi/4$; $\theta = \pi/2$, $\pi/4 \le \phi \le \pi/2$; $\theta = \pi/2 - t$ $(0 \le t \le \pi/2)$, $\phi = \pi/2$; $\theta = 0$, $\phi = \pi/2 - t$ $(0 \le t \le \pi/4)$.

233. Determinar:
   a) La curvatura integral del elipsoide.
   b) La curvatura integral de una esfera de tres asas.
   c) La curvatura integral de la superficie: $x^2 + y^4 + z^6 = 1$.

234. Demostrar que si dos familias de geodésicas se intersectan según un ángulo constante, la superficie tiene curvatura de Gauss nula.

235. Demostrar que la catenoide (Ejercicio 203) es la única superficie de revolución que es una superficie minimal (de curvatura media nula).

236. Supongamos que la superficie $\mathcal{M}: \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u,v)$ es minimal. Entonces la región de la superficie paralela $\mathcal{M}_\lambda$:

$$\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{y}}(u,v) = \vec{\mathbf{x}}(u,v) + \lambda\vec{\mathbf{N}}(u,v), \qquad \lambda = cte$$

que corresponde a un dominio D en el plano de los parámetros tiene menor área que la correspondiente región en $\mathcal{M}$.

237. Sobre una superficie $\mathcal{M}$ se verifica:

$$III - 2H\,II + K\,I = 0,$$

donde H es la curvatura media, K es la curvatura de Gauss y I, II y III son la primera, segunda y tercera forma fundamental, definida esta última por:

$$III : T_P(\mathcal{M}) \times T_P(\mathcal{M}) \to T_P(\mathcal{M}) \qquad (\vec{u},\vec{v}) \mapsto III_P(\vec{u},\vec{v}) = S_P(\vec{u}) \cdot S_P(\vec{v}).$$

238. Demostrar que en una superficie, los coeficientes de la 1ª forma fundamental y los símbolos de Christoffel de 1ª especie están relacionados por:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^i} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki}.$$

239. Demostrar que los símbolos de Christoffel de segunda especie se transforman respecto de dos representaciones paramétricas de acuerdo con la ley

$$\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^i_{jk}\frac{\partial \tilde{u}^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^\beta}\frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^\gamma} - \frac{\partial^2 \tilde{u}^\alpha}{\partial u^j \partial u^k}\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^\beta}\frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^\gamma}.$$

240. Calcular los símbolos de Christoffel Γ^k_{ij} de una superficie respecto a una parametrización explícita: $z = f(x,y)$.

B I B L I O G R A F Í A

[1] **Tom M. Apostol**.- Análisis Matemático. Editorial Reverté. Barcelona.

[2] **William M. Boothby**.- An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press. New York.

[3] **F. Brickell; R. S. Clark**.- Differenciable Manifolds. Van Nostrand Reinhold.

[4] **L. A. Cordero; M. Fernández; A. Gray**.- Geometría diferencial de curvas y superficies. Addison–Wesley.

[5] **M. P. Do Carmo**.- Geometría diferencial de curvas y superficies. Alianza Universidad Textos.

[6] **L. P. Eisenhart**.- An Introduction to Differential Geometry. Princeton University Press. Princeton.

[7] **L. P. Eisenhart**.- A Treatrise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. Dover Publications, Inc. New York.

[8] **Abraham Goetz**.- Introduction to Differential Geometry. Addison Wesley Publishing Company. Massachusetts.

[9] **Noel Hicks**.- Notas sobre Geometría Diferencial. Editorial Hispano Europea. Barcelona.

[10] **C. C. Hsiung**.- A first course od differential geometry. Wiley-Interscience.

[11] **W. Klingerberg**.- Curso de geometría diferencial. Alhambra.

[12] **S. Lefschetz**.- Introduction to Topology. Princeton, New Jersey.

[13] **J. Lelon-Ferrand; J.M.Arnaudiès**.- Curso de Matemáticas. Tomo III. Geometría y Cinemática. Reverté. Barcelona.

[14] **Martin M. Lipschutz**.- Teoría y Problemas de Geometría Diferencial. McGraw-Hill. México.

[15] **Richard S. Millman; George D. Parker**.- Elements of Differencial Geometry. Printice-Hall,Inc. New Jersey.

[16] **Barret O'Neill**.- Elementos de Geometría Diferencial. Limusa-Willey. Mexico.

[17] **C. Pisot; M. Zamansky**.- Matemáticas Generales. Algebra-Análisis. Montaner y Simón. Barcelona.

[18] **A. V. Pogorelov**.- Geometría diferencial. Mir. Moscú.

[19] **Julio Rey Pastor; Pedro Pi Calleja; César A. Trejo**.- Análisis Matemático. Vol.II. Kapeluz. Buenos Aires.

[20] **J. J. Stoker**.- Differential Geometry. Wiley. New York.

[21] **Dirk J. Struik**.- Geometría Diferencial Clásica. Aguilar. Madrid.

ÍNDICE ALFABÉTICO